

توان :

توان  $m \rightarrow a$   
 $a$  را  $m$  بار در خودش ضرب می‌کنیم  
 تعیین

مثال : 
$$\begin{cases} 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{9} \end{cases}$$

و تیرگی ؟ ✓

۱- هر عدد به توان ۱ برابر است با همان عدد  $a^1 = a$

مثال : 
$$\left(-\frac{1}{100}\right)^1 = -\frac{1}{100}$$

۲- هر عدد (غیر صفر) به توان صفر برابر است با ۱

$a^0 = 1$

( $a \neq 0$ )

مثال : 
$$\left(-4 \times 1000 + 477\right)^0 = 1$$

۳- صفر به توان هر عدد (غیر صفر) برابر است با صفر.

$0^a = 0$

( $a \neq 0$ )

مثال : 
$$0^{1000} = 0$$

$1^a = 1$

۴- ۱ به توان هر عدد برابر است با ۱

مثال : 
$$1^{4728} = 1$$

۵- اگر عددی بین ۰ و ۱ باشد، هر چه به توان عدد بزرگتری برسد، کوچکتر خواهد شد.

مثال : 
$$\frac{1}{8} > \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4} > 1 > \frac{1}{2}$$

۶- اگر عددها بزرگتر از ۱ باشد، هر چه توان عدد بزرگتر باشد، بزرگتر خواهد شد.

مثال:  $(\frac{5}{4})^3 > (\frac{5}{4})^2$

$$7^5 > 7^4 > 7^3 > 7^2 > 7^1 > 7^0 = 1$$

نست: اگر  $0 < x < 1$  و  $a$  و  $b$  اعداد صحیح باشند و  $b > a$ ، آنگاه  $x^a > x^b$

درست است؟

(۱)  $x = \frac{1}{2}$  و  $a = 2, b = 3 \Rightarrow (\frac{1}{2})^2 > \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{8} \Rightarrow x^a > x^b$

(۲)  $x = \frac{1}{2}$  و  $a = 2, b = 3 \Rightarrow (\frac{1}{2})^2 < (\frac{1}{2})^3 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{8} \Rightarrow x^a < x^b$

(۳)  $x^b < x^a \leftarrow$  عددها بین صفر و ۱ است، وقتی به توان عدد صغیر برسد، قطعاً صغیرتر

$x^b < x^a$  (درست است)

۷- اگر پایه منفی و توان زوج باشد، حاصل عددی مثبت و اگر توان فرد باشد، حاصل

عددی منفی خواهد بود.

مثال:  $(-3)^2 = +3^2 = +9$

$(-2)^{100} = +2^{100}$

$(-3)^3 = -3^3 = -27$

$(-2)^{99} = -2^{99}$

۸- اگر پایه منفی و علامت منفی داخل پرانتز باشد و توان زوج باشد، عددی مثبت خواهد شد.

منفی هم به توان برسد. در غیر این صورت توان فقط برای عدد است نه منفی

$(-2)^4 = +2^4 = +16$

$-2^4 = -16$  توان فقط برای عدد است نه منفی



۱- ضرب اعداد توان دار

← پایه‌هایمان باشند ← پایه‌هایمان را نوشته و توان‌ها را جمع می‌کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:  $3^2 \times 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$

← توان‌هایمان باشند ← توان‌هایمان را نوشته و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

مثال:  $3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 = 12^2$

عملت: تمرین امتیاز

نکته: اگر هم پایه و هم توان‌هایمان بود، به دلخواه از یکی از دو حالت بالا استفاده می‌کنیم.

$$2^3 \times 2^3 \rightarrow 2^{3+3} = 2^6$$

$$\rightarrow (2 \times 2)^3 = 4^3$$

۲- توان‌های توان: توان‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \times n}$$

مثال:  $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

عملت: تمرین امتیاز

نکته:  $(a^m)^n \neq a^{m^n}$

$$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$$

$$(2^3)^2 = 2^9 \Rightarrow 2^6 \neq 2^9$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بصورت یک عدد توان دار بنویسید.

①  $7^3 \times 7 \times 7^6 \times 7^2 = 7^{3+1+6+2} = 7^{12}$

$$\textcircled{2} \underbrace{10^2 \times (10^3)^4 \times 10^2 \times 10^4}_{(10 \times 10)^2 = 10^4} = 10^2 \times 10^4 = 10^{2+4} = 10^6$$

$$\textcircled{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \times (-2)^4 \times \left(\frac{1}{9}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2} \times (-2) \times \frac{1}{9}\right)^4 = \left(\frac{1}{9}\right)^4$$

$$\textcircled{4} (2^2)^4 - 2^4 + (2^4)^1 = 2^8 - 2^4 + 2^4 = 256 - 16 + 16 = 256$$

$$\textcircled{5} (2^2)^4 \times \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^0\right) \times 2^1 \times 10^2 = 2^8 \times 1 \times 2^1 \times 10^2 = 2^9 \times 10^2 = 512 \times 100 = 51200$$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$$(a^m \times b^n)^c = a^{mc} \times b^{nc}$$

$$(a^m + b^n)^c \neq a^{mc} + b^{nc} \quad \text{توجه:}$$

$$(3 + 2^2)^2 \stackrel{?}{=} 3^2 + 2^4$$

$$(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$$

$$9 + 16 = 25$$

$$49 \neq 25$$

نتیجه: با هم تجزیه کردن در محاسبات اعداد توان دار بسیار کمک کننده است.

$$\textcircled{6} 17^3 \times 17^4 = (17^3)^2 \times (17^3)^2 = 17^6 \times 17^6 = 17^{12}$$

$$\textcircled{7} 10^1 \times 2^0 = 10^1 \times (2^2)^1 = 10^1 \times 4 = (10 \times 4)^1 = 40^1$$

$$\textcircled{8} \left(10^2 \times 10^3\right)^2 \times 10^4 \times 7^1 = (10^5)^2 \times 10^4 \times 7^1 = 10^{10} \times 10^4 \times 7^1 = 10^{14} \times 7^1$$

$(10^2)^2 \leftarrow (10^5)^2 = 10^{10}$

$$= \underline{5^1} \times \underline{2^{30}} \times \underline{15^{30}} \times \underline{7^1} = 20^1 \times 20^{30} = 20^{31}$$

۴- جمع و تفریق اعداد توان دار: باید ابتدا هر عدد را به توان رساند سپس با جمع یا تفریق برد

$$\text{مثال: } (2^4 + 2^2) - (3^3 - 3^2) = (16 + 4) - (27 - 9) \\ = 20 - 18 = 2$$

✓  
مدرکات خاصه زیر:

✓  
جمع تعدادی اعداد توان دار بیان: تعداد آنها در پایه آن اعداد خاصه می بینیم.

$$\textcircled{9} \quad 2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5 = 4 \times 2^5 = 2^2 \times 2^5 = 2^7$$

$$\textcircled{10} \quad 11^1 + 11^1 + 11^1 = 3 \times 11^1 = 3 \times (3^2)^1 = 3 \times 3^2 = 3^{1+2} = 3^3$$

$$\textcircled{11} \quad \underbrace{5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2}_{5 \times 5^2 = 5^4} + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 = 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^2 + 5^2 \\ = 5 \times 5^3 = 5^4$$

$$\textcircled{12} \quad 3 \times 3^2 \times 3^3 \times \dots \times 3^{10} = 3^{1+2+3+\dots+10} = 3^{55}$$

✓  
نتیجه:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

$$\textcircled{13} \quad 125 \times \left( (5^2)^3 \right)^2 = 5^3 \times 5^{12} = 5^{3+12} = 5^{15}$$

**یادآوری** در سال گذشته، ضرب دو عدد توان دار با پایه های مساوی و نیز توان های مساوی را یاد گرفتید. این قواعد را با نمادهای ریاضی به صورت زیر می نویسیم.  
اگر  $a$  عددی دلخواه و  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی باشند:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

(یا برای سادگی:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  و  $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ )

برای آمادگی بیشتر، تمرین های زیر را انجام دهید.

۱- حاصل هر یک از عبارات های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۱.۲

$$2^6 \times 2^3 = 2^{6+3} = 2^9$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{12} = \frac{2^{12}}{3^{12}} = \frac{(2 \times 2)^6}{(3 \times 3)^6} = \frac{2^6 \times 2^6}{3^6 \times 3^6} = \frac{2^6}{3^6} \times \frac{2^6}{3^6} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

$$(-6)^4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \left(-6 \times \frac{1}{6}\right)^4 = (-1)^4 = 1$$

$$2^5 \times 3^2 \times 6^5 \times 4^2 = (2^5 \times 3^2) \times (6^5 \times 4^2) = (2^5 \times 3^2) \times (2^5 \times 3^5 \times 2^4 \times 3^2) = 2^{10+5+4} \times 3^{2+5+2} = 2^{19} \times 3^9$$

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times 11 = 3 \times \frac{1}{3^5} \times 11 = \frac{3}{3^5} \times 11 = \frac{1}{3^4} \times 11 = \frac{11}{81}$$

$$36 \times 144 = 6^2 \times 12^2 = (6 \times 12)^2 = 72^2 = 5184$$

$$2^3 \times 8^5 \times 4^2 = 2^3 \times (2^3)^5 \times 2^4 = 2^3 \times 2^{15} \times 2^4 = 2^{3+15+4} = 2^{22}$$

$$8^3 \times 8^5 = 8^{3+5} = 8^8$$

۲- حاصل هر یک را به صورت عبارتی توان دار بنویسید.

$$a^2 \times a^4 = a^{2+4} = a^6$$

$$x^4 \times y^4 = (xy)^4$$

$$(ab)^5 \times a^2 \times b^4 = a^{5+2} \times b^{5+4} = a^7 \times b^9$$

$$(xy)^2 \times (xy)^9 = (xy)^{2+9} = (xy)^{11}$$

$$125 \times 18^2 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 5^3 \times (2 \times 3^2)^2 \times \frac{1}{3^2} = 5^3 \times 2^2 \times 3^4 \times \frac{1}{3^2} = 5^3 \times 2^2 \times 3^2 = 10^3 \times 3^2 = 1000 \times 9 = 9000$$

$$8a \times (2a)^2 \times 2a^2 = 8a \times 4a^2 \times 2a^2 = 8 \times 4 \times 2 \times a \times a^2 \times a^2 = 64a^5 = (2a)^5$$

$$\frac{(2a)^3}{a^2} = \frac{2^3 a^3}{a^2} = \frac{8a^3}{a^2} = 8a^{3-2} = 8a$$

۳- حجم مکعبی به ضلع  $2a$  چند برابر حجم مکعبی به ضلع  $a$  است؟  
 ۸ برابر است.

۴- جاهای خالی را با عددها و حرف های مناسب پر کنید.

$$18^5 = (6 \times 3)^5$$

$$a^4 = a^2 \times a^2$$

$$\frac{7}{1} \times 4^5 = 4^5$$

$$\left(-\frac{7}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \left(-\frac{7}{2}\right)^4$$

$$(4 \times 3)^6 = 4^6 \times 3^6$$

## فعالیت



حاصل عبارت  $2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$  را به دو روش زیر می‌توان نشان داد.

$$2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12} \qquad 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = (2^3)^4$$

با مقایسه تساوی‌های بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت:  $(2^3)^4 = 2^{12}$

اکنون، درستی تساوی‌های زیر را به هر روشی که می‌توانید بررسی کنید.

$$(7^2)^5 = 7^{10} \qquad \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right]^4 = \left( \frac{1}{2} \right)^{12}$$

$$\left[ (-2)^3 \right]^7 = (-2)^{21} \qquad (a^2)^4 = a^8$$

آنچه را فراگرفته‌اید به صورت قانون کلی بیان کنید.

اگر  $a$  عددی دلخواه و  $m$  و  $n$  عددهایی طبیعی باشند، آن‌گاه:

$$(a^m)^n = a^{\boxed{\phantom{000}}}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

## کار در کلاس ۱.۳



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت توان‌دار بنویسید.

$$(5^2)^4 = 5^{2 \times 4} = 5^8 \qquad \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^2 \right]^3 = \left( \frac{2}{3} \right)^{2 \times 3} = \left( \frac{2}{3} \right)^6 \qquad [(-6)^2]^5 = (-6)^{2 \times 5} = (-6)^{10} = 6^{10}$$

$$\left[ \left( -\frac{1}{5} \right)^3 \right]^4 = \left( -\frac{1}{5} \right)^{3 \times 4} = \left( -\frac{1}{5} \right)^{12} \qquad (18^2)^7 = 18^{2 \times 7} = 18^{14} \qquad (x^2)^4 = x^{2 \times 4} = x^8$$

$$[(ab)^3]^2 = (ab)^{3 \times 2} = (ab)^6 \qquad (xy^2)^3 = x^3 y^{2 \times 3} = x^3 y^6 \qquad (2^m)^n = 2^{m \times n} = 2^{mn}$$

$$((xy)^2)^3 = (xy)^{2 \times 3} = (xy)^6$$



۲- کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید.

$$3^2 \times 3^2 = 3^4$$

$$3^2 + 3^2 = 3^4$$

$$(3^2)^2 = 3^2 \times 3^2$$

$$3^5 \times 3^5 = (3^5)^2$$

$$3^2 \times 3^2 = 3^4$$

$$(3^2)^2 = 3^2$$

$$(5^2)^2 = 5^4$$

$$(3^2 \times 3^2)^2 = 9^2$$

$$3^2 \times 3^2 = 9^4$$

$$3^5 \times (2^2)^5 = 12^5$$

$$(3 \times 2)^5 = (3 \times 2)^5 = 12^5$$

$$a^2 \cdot a^2 = 1$$

$$a^2 \times a^2 = a^4$$

$$((-2)^2)^2 = 2^4$$

$$6(-2)^6 = 2^6$$

$$(-4^6) = 4^6$$

۴- توان فقط برای ۴

۳- حاصل عبارت  $(-5)^2 \times (-5)^2$  برابر کدام یک از اندازه‌های زیر است؟

$$(-5)^7 \times (-5)^2 = (-5)^9$$

(الف)  $(-5)^8$

(ب)  $-5^8$

۴- در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$$9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$$

$$3^3 = (\text{ضلع})^3$$



۱- حجم مکعبی به ضلع ۸cm را به صورت یک عدد توان دار بنویسید که پایه آن عدد ۲ باشد.

$$2^3 \times 9^5 = 3^3 \times (3^2)^5 = 3^3 \times 3^{10} = 3^{13}$$

۲- بیست و هفت برابر عدد ۹ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۳- حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

$$[(-3)^2]^2 = (-3)^4 = 3^4$$

$$[(3^2)]^2 = 3^4$$

$$\therefore (2 \times 2 \times 2)^4 = 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$$

$$2^5 \times 2^2 \times 2^7 \times 2^3 = 2^5 \times 2^2 \times 2^7 \times 2^3 = 2^{17}$$

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \left(-\frac{5}{6} \times \frac{7}{5} \times \frac{3}{7}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$2^4 \times 2^4 \times 2^4 = 2^{4+4+4} = 2^{12}$$

$$(x^2)^5 \cdot (y^3)^2 \cdot x^2 y^4 = x^{10} y^6 x^2 y^4 = x^{12} y^{10}$$

$$\therefore (2^4)^3 = 2^{12}$$

۴- کدام عددهای طبیعی را می توان به جای  $\square$  نوشت تا نامساوی زیر درست باشد؟

$\square \rightarrow 4, 6, 8, 10, \dots$   
 $(-2) \square > 15$

$$(-2)^3 = 4 < 15 \quad \times$$

$$(-2)^4 = 16 > 15 \quad \checkmark$$

۵- حاصل  $2^7 + 2^7$  و حاصل  $3^5 + 3^5 + 3^5$  را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$2^7 + 2^7 = 2 \times 2^7 = 2^8 \quad \leftarrow$$

$$3^5 + 3^5 + 3^5 = 3 \times 3^5 = 3^{1+5} = 3^6 \quad \leftarrow$$

۶- عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ را طوری در جاهای خالی قرار دهید که یک تساوی درست به دست

آید. (از هر چهار عدد استفاده کنید).

$$3 \times 8 = 24 \quad \rightarrow \quad 25 - 1 = 24$$

$$(3) \times (2)^3 = 5^2 - (1) \quad (4)$$

۷- مقدار عددی عبارتهای زیر را به ازای  $a=6$  و  $b=-2$  و  $c=-4$  به دست آورید.

الف) 
$$\frac{-2(a+b^2) + \frac{c^2}{b}}{b} = \frac{-2(6 + (-2)^2) + \frac{(-4)^2}{-2}}{-2} = \frac{-2(6+4) + \frac{16}{-2}}{-2} = \frac{-2(10) - 8}{-2} = \frac{-20 - 8}{-2} = \frac{-28}{-2} = 14$$

ب) 
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + bc - 1$$

$$= \left(\frac{6}{-2}\right)^2 + (-2)(-4) - 1 = 9 + 8 - 1 = 16$$

$$\left(\frac{6}{-2}\right)^2 = 9$$









