

درس اول : عددهای صحیح

تعریف اعداد صحیح

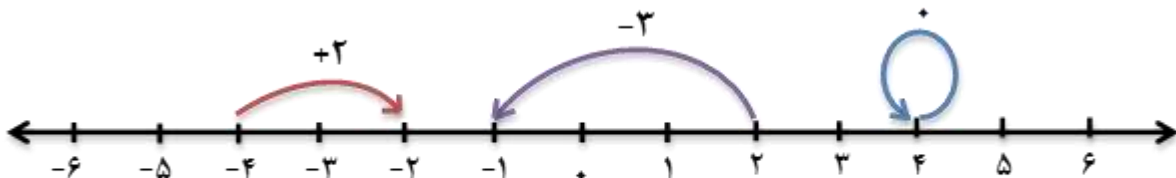


اعداد صحیح از سه دسته تشکیل شده اند. (اعداد مثبت، صفر، اعداد منفی)
اعداد صحیح را با حرف انگلیسی $\mathbb{Z}$ نشان می دهند.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots و ۱ و ۰ و -۱ و -۲ و \dots \}$$

حرکت روی محور اعداد صحیح:

جا به جایی از یک نقطه به نقطه ی دیگر را حرکت می گویند؛ اگر این حرکت در جهت مثبت (سمت راست) باشد با علامت مثبت و اگر در جهت منفی (سمت چپ) باشد، علامت منفی خواهد داشت.



مثال:

قرینه

به اعدادی که فاصله آن ها تا (صفر) با هم برابر باشد دو عدد قرینه می گویند. مانند $+3$ و -3



مثال: $-20 = \text{قرینه } +20$

نکات مربوط به قرینه

نکته ۱: قرینه را با علامت $(-)$ نمایش می دهند. قرینه ی هر عدد صحیح را می توان با تغییر علامت آن بدست آورد.

نکته ۲: قرینه ی عدد صفر برابر صفر می باشد.

نکته ۳: قرینه قرینه عدد خود عدد می باشد.

$$-(+7) = -7$$

$$-(-(-3)) = -3$$

مثال:

$$-(-12) = +12$$

$$-(-(+3)) = +3$$

جمع و تفریق اعداد صحیح

برای محاسبه ی حاصل جمع و یا تفریق عدد های صحیح ابتدا مختصر نویسی (ساده نویسی) می کنیم به این صورت که پرانتزها رو حذف کرده ، سپس اگر عددی بیشتر از یک علامت داشته باشد، علامت های آن ها را در هم ضرب می کنیم تا به یک علامت تبدیل شود.

آنگاه با یکی از دو حالت زیر مواجه می شویم:

حالت اول: عدد ها هم علامت باشند ← در این حالت یکی از علامت ها را نوشته، سپس عدد ها را با هم جمع می کنیم.

مثال:

$$(-3) + (-7) = -10$$

$$(+8) - (-6) = +8 + 6 = +14$$

حالت دوم: عدد ها هم علامت نباشند در این حالت علامت عددی که بزرگتر است (بدون در نظر گرفتن علامت) را نوشته سپس عدد ها را از هم کم می کنیم.

مثال:

$$(-6) + (+8) = -6 + 8 = +2$$

$$25 - (+30) = 25 - 30 = -5$$

نکته: اگر تعداد عدد ها بیشتر از دو تا بود ، می توان عدد های مثبت را با هم و عدد های منفی را با هم جمع کرد سپس حاصل نهایی را بدست آورد.

$$-4 + (+6) - (+3) + 7 = -4 + 6 - 3 + 7 = -7 + 13 = +6$$

ضرب و تقسیم اعداد صحیح

ابتدا علامت ها را در هم ضرب کرده سپس اعداد را با توجه به علامت بین آن ها ضرب یا تقسیم می کنیم.

جدول ضرب علامت ها

× یا ÷	+	-
+	+	-
-	-	+

مثال:

$$[(-6) \times (+4)] \div (-3) = (-24) \div (-3) = +8$$

$$-8 \times [12 \div (+4)] = (-8) \times (+3) = -24$$

اولویت های انجام عملیات در ریاضی: برای محاسبه ی عبارت ترکیبی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم باید بر اساس ترتیب اولویت ها شروع به پاسخ دادن کرد.

(۱) مجموعه یا گروه یا پرانتز

(۲) توان و جذر

(۳) ضرب و تقسیم (از سمت چپ)

(۴) جمع و تفریق

مثال:

حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$4 - 4 \times 3^2 \div 6 - (9 - 2^3) =$$

ابتدا حاصل داخل پرانتز

$$9 - 2^3 = 9 - 8 = 1$$

حال داریم

$$4 - 4 \times 3^2 \div 6 - 1 =$$

سپس از سمت چپ طبق ترتیب عملیات پیش می رویم
توان و جذر

$$4 - 4 \times 9 \div 6 - 1 =$$

مجدد از سمت چپ طبق ترتیب عملیات پیش می رویم

$$4 - 36 \div 6 - 1 =$$

$$4 - 6 - 1 = -3$$

بیشتر بدانیم: برای جمع اعداد یک سری منظم از رابطه های زیر استفاده می کنیم.

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله اعداد}} + 1 \quad \text{مجموع اعداد} = \frac{\text{عدد اول} + \text{عدد آخر}}{2} \times \text{تعداد اعداد}$$

مثال:

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$3 + 6 + 9 + \dots + 204 =$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{204 - 3}{3} + 1 = 67 + 1 = 68$$

$$\text{مجموع اعداد} = \frac{204 + 3}{2} \times 68 = 207 \times 34 = 7038$$

نکته: برای جمع اعداد یک سری منظم که یک در میان مثبت و منفی باشند ابتدا دو به دو

اعداد را جواب می دهیم.

مثال :

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$10 \overset{-2}{-} 12 + 14 \overset{-2}{-} 16 + \dots + 102 \overset{-2}{-} 104 =$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{104 - 10}{2} + 1 = 47 + 1 = 48$$

$$48 \div 2 = 24$$

$$10 - 12 + 14 - 16 + \dots + 102 - 104 = 24 \times -2 = -48$$



تعریف اعداد گویا

هر عدد را که بتوان به صورت یک کسر نوشت، به طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح بوده و مخرج آن صفر نباشد را عدد گویا می نامند.

اعداد گویا را با حرف انگلیسی Q نمایش می دهند.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

توجه: بنابراین عددهای طبیعی، حسابی، صحیح، کسری، اعشاری، مخلوط و رادیکال هایی که عدد زیر رادیکال آن مجذور کامل باشد یک عدد گویا می باشند.

مثال:

$$-\frac{5}{6} \quad 13 = \frac{13}{1} \quad \frac{8}{-3} \quad 0.7 = \frac{7}{10} \quad -2\frac{3}{4} \quad \sqrt{25} = 5 = \frac{5}{1} \quad 0 = \frac{0}{1}$$

توجه: اگر مخرج کسری صفر باشد، کسر را تعریف نشده می نامند.

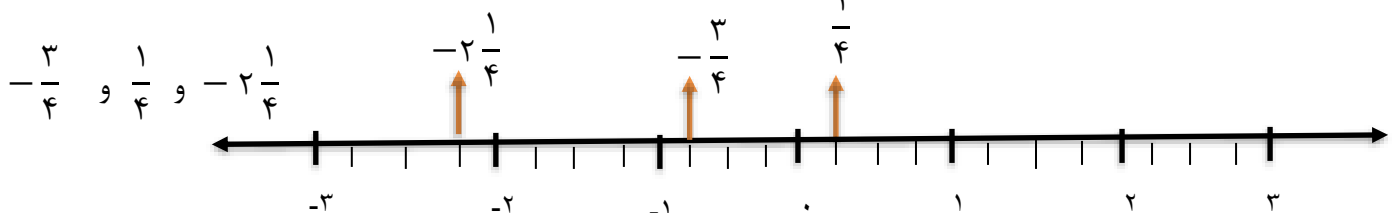
نمایش اعداد گویا روی محور

برای نمایش هر عدد گویا روی محور طبق مراحل زیر عمل می کنیم:

- ۱) واحدهای محور را به تعداد عدد مخرج کسر تقسیم می کنیم.
- ۲) با توجه به علامت عدد، جهت حرکت را مشخص می کنیم، علامت + حرکت به سمت راست و علامت - حرکت به سمت چپ است.
- ۳) به تعداد عدد صورت کسر از صفر، واحدهای تقسیم شده را شمارش می کنیم.

مثال:

عددهای مقابل را مانند نمونه روی محور نمایش دهید.



نکته: قرینه ی اعداد گویا همانند قرینه عدد های صحیح می باشد.

مثال: $-\left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$ $-\left(-\frac{7}{5}\right) = +\frac{7}{5}$

نکته: برای نوشتن معکوس اعداد گویا ، جای صورت و مخرج آن را عوض می کنیم.

مثال:

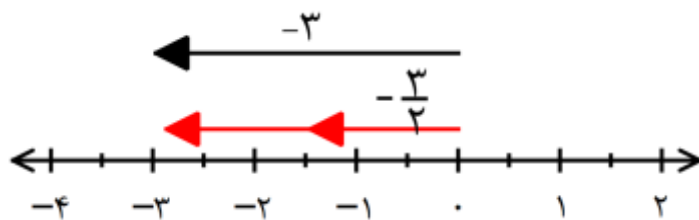
$$-\frac{11}{6} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{6}{11}$$

$$-\frac{2}{4} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{4}{2}$$

$$-\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{3}{1}$$

نکته: علامت کسر را می توان در کنار، صورت و یا مخرج کسر نوشت.

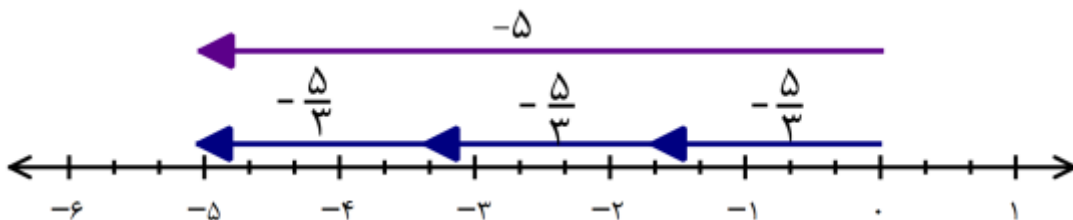
به محور زیر دقت کنید. می دانیم $\frac{-3}{2}$ یعنی $-3 \div 2$. برای نمایش این عدد برداری به طول ۳- رسم می کنیم و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کنیم. (مطابق محور شماره ۱) هر تکه برداری در جهت منفی محور اعداد و به طول $\frac{3}{2}$ واحد است. پس عدد متناظر با هر قسمت کوچک $\frac{3}{2}$ - است. بنابراین داریم:



$$\frac{-3}{2} = -3 \div 2 = -\frac{3}{2}$$

مثال: تساوی $-\frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$ را به کمک محور کامل کنید.

پاسخ:



محدوده ی اعداد:

اعداد بزرگتر از ۲ را به صورت $x > 2$ نمایش می دهیم و شامل تمامی اعدادی است که از ۲ بزرگترند.

اعداد بزرگتر یا مساوی ۲ را به صورت $x \geq 2$ نمایش می دهیم و شامل عدد ۲ و همه ی اعداد بزرگتر از ۲ است.

اعداد بین ۱ و ۲ را به صورت $1 < x < 2$ نمایش می دهیم .

اعداد کوچکتر یا مساوی ۲ و بزرگتر از ۱ را با $1 < x \leq 2$ نمایش می دهند و شامل عدد ۲ و تمام اعداد بین ۱ و ۲ است.

مثال: برای هر کدام از محدوده های زیر دو عدد مثال بزنید:

$x \leq -1$	$-1 < x \leq 0$	$0 < x \leq 1$	$1 < x \leq 2$	$x > 2$
-4 و $-\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{5}$ و $-\frac{8}{11}$	-1 و $\frac{8}{11}$	2 و $1/8$	3 و $8/75$

درس سوم : تساوی کسرها

اگر صورت و مخرج کسر را در عددی غیر از صفر ضرب کنیم ، یا بر عددی غیر از صفر تقسیم کنیم ، کسر حاصل با کسر اول مساوی می باشد.

مثال:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

$\times 2$
 $\times 3$
 $\times 4$
 $\times 2$
 $\times 3$
 $\times 4$

تمرین: برای هر کسر زیر ۲ کسر مساوی بنویسید

$$\frac{3}{5} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

نکته: در تساوی دو کسر اگر یکی از عدد ها مجهول بود به کمک تساوی کسر ها می توان مقدار مجهول را به دست آورد.

مثال: مانند نمونه مقدار مجهول را به دست آورید

$$\frac{3}{7} = \frac{x}{28} \quad x = 3 \times 4 = 12$$

$$\frac{x}{10} = \frac{10}{4}$$

$$\frac{10}{12} = \frac{x}{36}$$

توجه: برای اینکه یک کسر را تا حد ممکن ساده کنیم باید صورت و مخرج آن را بر «ب.م.م» صورت و مخرج تقسیم کنیم.

توجه: برای به دست آوردن «ب.م.م» ابتدا دو عدد را به عامل های اول تجزیه می کنیم، سپس حاصل ضرب عامل های مشترک دو عدد با توان کمتر را حساب می کنیم.

تمرین: کسر زیر را مانند نمونه تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{-56}{210} =$$

$$56 = 2^3 \times 7$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

حل:

$$(56 \text{ و } 210) = 2 \times 7 = 14$$

$$\frac{56 \div 14}{210 \div 14} = \frac{-4}{15}$$

$$\frac{48}{100} = ?$$

نکته: از تساوی کسر ها می توان نتیجه گرفت که  هر کسر گویا بی شمار نمایش مختلف دارد.

نکته: نوشتن عددی گویا بین دو عدد به چند روش است که یک روش کاربردی آن در زیر آورده شده

ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد کسر های خواسته شده ضرب می کنیم.

توجه: با توجه به تقسیم شدن فاصله ی بین دو عدد کسر های مختلفی بین هر دو عدد صحیح می توان نوشت.

توجه: بین هر دو عدد کسری نیز می توان کسر های بیشماری پیدا کرد.

مثال: ما بین دو عدد گویا ی زیر دو عدد گویا (دو کسر) پیدا کنید.

$$\frac{3}{4} \text{ و } \frac{5}{7}$$

$$\frac{3}{4} \text{ و } \frac{5}{7}$$

$$\frac{21}{28} \text{ و } \frac{20}{28}$$

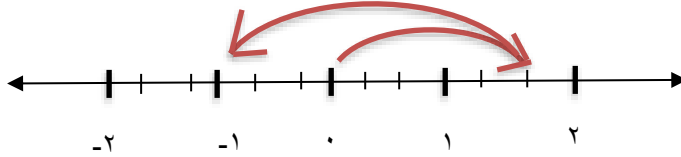
$$\frac{21 \times 3}{28 \times 3} \text{ و } \frac{20 \times 3}{28 \times 3}$$

$$\frac{60}{84} < \frac{61}{84} < \frac{62}{84} < \frac{63}{84}$$

جمع و تفریق اعداد گویا

روش اول با استفاده از محور: از حرکت های علامت دار روی محور استفاده می کنیم.

$$\left(+\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{3}{3} = -1$$



روش دوم: هنگامیکه دو عدد گویا دارای مخرج های برابر باشند، جمع و تفریق آن ها به سادگی و مانند عدد های صحیح صورت می گیرد.

مثال:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{7-5}{3} = \frac{2}{3}$$

در صورتی که مخرج ها یکسان نباشند، ابتدا مخرج ها را با استفاده از مخرج کسر دیگر یکسان می کنیم (ک.م.م)، سپس مانند قبل محاسبات جمع و یا تفریق را انجام می دهیم.

مثال:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$$

روش بدست آوردن ک.م.م: ابتدا هر عدد را به عامل های اول تجزیه می کنیم سپس عامل های مشترک هر دو عدد را در عامل های غیر مشترک ضرب می کنیم.

مثال:

$$[8 \text{ و } 12] = 24$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 \quad \longrightarrow \quad 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

تمرین: حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$-\frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{15}\right) = \frac{-9+8}{30} = -\frac{1}{30}$$

$$[10, 15] = 30$$

توجه: بهترین مخرج مشترک دو کسر ، همان ک.م.م عددهای مخرج هاست .

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\frac{8}{12} - \left(\frac{12}{16}\right) =$$

$$-\frac{7}{4} - \left(-\frac{13}{4}\right) =$$

ضرب و تقسیم اعداد گویا

ضرب اعداد گویا: هنگام ضرب دو عدد گویا مراحل زیر انجام می شود

(۱) ابتدا صورت را با مخرج یا بالعکس ساده کنید. (در صورت امکان)

(۲) علامت های دو عدد را طبق قانون ضرب علامت ها در هم ضرب کنید.

(۳) سپس صورت های دو کسر را در هم و مخرج ها نیز در هم ضرب کنید.

مثال:

$$\left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(+\frac{7}{9}\right) = -\frac{1 \times 7}{5 \times 9} = -\frac{7}{45}$$

تمرین: حل کنید.

$$\left(-\frac{20}{21}\right) \times \left(+\frac{28}{80}\right) =$$

نکته: اگر در ضرب اعداد گویا عددی، عدد مخلوط بود ابتدا عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنید.

مثال:

$$2\frac{3}{5} = (2 \times 5) + 3 = \frac{13}{5}$$

تقسیم اعداد گویا: هنگام تقسیم دو عدد گویا مراحل زیر را انجام دهید.

(۱) کسر اول را بدون تغییر بنویسید.

(۲) علامت تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و کسر دوم را به صورت معکوس بنویسید.

(۳) ضرب به دست آمده را انجام دهید.

مثال:

$$\left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(+\frac{7}{4}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(+\frac{4}{7}\right) = -\frac{3 \times 4}{5 \times 7} = -\frac{12}{35}$$

نکته: اگر جای صورت و مخرج یک کسر را تغییر دهیم معکوس آن کسر به دست می آید.

نکته : ساده کردن کسر ها در تقسیم بعد از اینکه به ضرب تبدیل شد الزامی است.

نکته : در صورت وجود عدد مخلوط ابتدا به کسر تبدیل کنید.

تمرین : حل کنید.

$$\left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(\frac{2}{15}\right) =$$

نکته : تقسیم $\frac{2}{5} \div \frac{3}{8}$ را در نظر بگیرید. این تقسیم را می توان به صورت $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}}$ نیز نوشت . محاسبه این کسر با

ضرب عدد های مشخص شده انجام می شود.

یعنی ضرب عدد های دور را در صورت و ضرب عدد های نزدیک را در مخرج می نویسیم.

به این عمل «دور در دور _ نزدیک در نزدیک» گفته می شود.

مثال :

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2 \times 8}{3 \times 5} = \frac{16}{15}$$

تمرین : حل کنید.

$$\frac{\frac{9}{5}}{-\frac{12}{15}} =$$

نکته : تنها عددی که معکوس ندارد عدد صفر است.

نکته : حاصل ضرب هر عدد در معکوس خودش برابر ۱ می شود.

نکته : معکوس عدد ۱ خود عدد یک می شود.



(۱) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{-36 \div 9 + (-16)}{-2 + 3[4 + (-10)]} =$$

(۲) برای هریک از جمع و تفریق های زیر، یک محور با حرکت متناظر آن رسم کنید و سپس حاصل را بنویسید.

$$-9 - (-6) =$$

$$-8 + (+4) + (+2) =$$

(۳) حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(-25 + 25) + (-9 - 13) - (-14 + 15) =$$

$$-15 + [35 \div (-7)] =$$

(۴) حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

$$(15 - 1)(15 - 2)(15 - 3) \times \dots \times (15 - 15) =$$

(۵) مجموع اعداد صحیح بین -100 و $+100$ را تعیین کنید.

(۱) روی محور اعداد ، نقطه های خواسته شده را مشخص کنید.

$$A = -3\frac{1}{4}$$

$$B = +\frac{14}{5}$$

$$C = \frac{5}{8}$$

(۲) دور اعداد گویا خط بکشید.

$$-\frac{17}{\sqrt{9}} \quad \text{و} \quad -\frac{\sqrt{13}}{13} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{48}{3}} \quad \text{و} \quad -\frac{\cdot}{7} \quad \text{و} \quad 9\frac{7}{8}$$

۳) سه کسر مساوی کسر های داده شده بنویسید.

$$+\frac{6}{10} = \text{---} = \text{---} = \text{---}$$

$$-3\frac{5}{4} = \text{---} = \text{---} = \text{---}$$

۴) حاصل عبارت مقابل را محاسبه کرده و جواب را ساده کنید.

$$\frac{(-128) \times (-98)}{+49 \times (-96) \times (-20)} =$$

ایستگاه سه :

۱) برای جمع و تفریق های زیر ، محور و حرکت های متناظر را رسم کنید.

$$\left(+\frac{7}{4}\right) + \left(-\frac{9}{4}\right) =$$

$$\left(+\frac{12}{5}\right) - \left(+\frac{10}{5}\right) =$$

۲) حاصل عبارت های زیر را محاسبه و سپس ساده کنید.

$$+\frac{7}{18} - \frac{11}{12} =$$

$$5 - \left(\frac{1}{8} - 3\frac{5}{12}\right) =$$

ایستگاه چهار:

۱) ضرب های زیر را انجام دهید.

$$\left(-\frac{3}{8}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) =$$

$$\left(+3\frac{1}{8}\right) \times \left(-4\frac{4}{5}\right) =$$

$$-4\frac{2}{7}$$

$$-\left(-\frac{5}{12}\right)$$

۲) معکوس اعداد مقابل را بیابید.

۳) حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(-81) \div (+21) =$$

$$\left(-2\frac{1}{3}\right) \div \left(-\frac{1}{15}\right) =$$

$$\frac{-\frac{8}{5}}{+\frac{2}{25}} =$$