

فصل ۲ : حساب اعداد طبیعی

درس اول : یادآوری عددهای اول

یادآوری :

۱)شمارنده (مقسوم علیه) یک عدد : شمارنده ها همان اعدادی هستند که عدد داده شده بر آنها بخشپذیر می شود .

مانند : شمارنده های عدد ۱۵ اعداد ۱ ، ۳ ، ۵ و ۱۵ هستند

۲)تعریف عددهای اول : هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که هیچ شمارنده طبیعی به جز خودش و یک نداشته باشد، عدد اول نامیده می شود . مانند عدد ۵ و ۷ زیرا : ۵ و ۱ = شمارنده های ۵ ۷ و ۱ = شمارنده های ۷

۳)تعریف عدد های مرکب : هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که بتوان آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت ، عدد مرکب می نامند . مانند : ۱۵×۲=۱۰×۳=۶×۵=۳۰ ۳×۲=۶

نکته های مهم ؛

۱. عدد یک ، نه اول است و نه مرکب . (زیرا فقط یک شمارنده دارد ؛ یعنی خود یک)

۲. هر عدد اول دقیقا دو شمارنده دارد .

۳. هر عدد مرکب بیش از دو شمارنده دارد .

۴. عدد یک ، شمارنده ی همه عددهای طبیعی است .

۵. بزرگترین شمارنده هر عدد ، خود عدد است .

مضرب های طبیعی یک عدد : برای نوشتن مضرب های طبیعی یک عدد ، کافی است عدد داده شده را به ترتیب در اعداد طبیعی ضرب کنیم تا مضرب های طبیعی آن بدست بیاید .

مثال۱ : مضرب های طبیعی عددهای زیر را بنویسید.

مضرب های طبیعی۵ = ۱ × ۵ و ۲ × ۵ و ۳ × ۵ و ۴ × ۵ و ... = ... و۲۰و۱۵و۱۰و۵

مضرب های طبیعی۶ = ۶و۱۲و۱۸و۲۴و...

با توجه به مثال بالا می توان نکته های زیر را نتیجه گرفت :

۱. فقط اولین مضرب هر عدد اول ، عددی اول است و بقیه مضرب های آن مرکب هستند .(مثلا ۵ عددی اول است پس اولین مضرب آن یعنی خود ۵ ، اول و بقیه مضرب های آن یعنی ...و۲۰و۱۵و۱۰ مرکب هستند.)

۲.همه مضرب های یک عدد مرکب ، مرکب هستند.(مثلا ۶ عددی مرکب است پس همه مضرب های آن مرکب هستند.)

به این ترتیب : اعداد طبیعی به سه بخش تقسیم می شوند : عدد یک ، عدد های اول ، عدد های مرکب

مثال۲ : الف- عدد ۱۰ چند مضرب دارد؟ بی شمار

ب-چند تا از مضرب های آن عدد اول هستند؟ هیچ کدام ؛ زیرا خود ۱۰ عددی مرکب است،پس همه مضرب های آن نیز مرکب اند.

ج-تنها مضرب اول عدد ۲۳ کدام است ؟ خود عدد ۲۳

نکته مهم تعداد شمارنده های یک عدد محدود است اما تعداد مضرب های آن بی شمار؛

دو عدد متباین(نسبت به هم اول) : اگر ب.م.م (بزرگترین مقسوم علیه مشترک) دو عدد برابر یک باشد ، می گوییم دو عدد نسبت به هم اول هستند .

مثال۳ : عدد های ۶ و ۳۵ نسبت به هم اول هستند ؛ زیرا :

۱ = (۶و۳۵) ⟵ شمارنده های ۶ = ۱ و ۲ و ۳ و ۶ شمارنده های۳۵ = ۱و۷و ۵ و۳۵

نکته های مهم؛

۱.هر دو عدد اول متمایز نسبت به هم اول هستند . مثال : ۱=(۱۱و۲۳)

۲.هر دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول هستند . مثال : ۱=(۳۱و۳۲)

۳.عدد یک و هر عدد طبیعی بزرگتر از یک نسبت به هم اول هستند . مثال : ۱=(۱و۲۵)

۴.اگر دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند ، ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) آنها از حاصل ضرب آن دو عدد بدست می آید . مثال : اگر ۱=(۳و۴) ⟵ ک.م.م : ۱۲=۳×۴=[۳و۴]

مثال۴: الف- سه عدد مرکب بنویسید که غیر از ۲ و ۷ شمارنده اول دیگری نداشته باشند.

چون ۲و۷ هر دو شمارنده های اول این اعداد هستند پس باید آنها را در هم ضرب کنیم و چون غیر از ۲و۷ شمارنده اول دیگری ندارند، پس برای ساخت عدد های بعدی باید به تعداد دلخواه ۲ و ۷ را در هم ضرب کنیم .

۲×۷×۷=۹۸ ۲×۲×۲×۷=۵۶ ۲×۲×۷=۲۸ ۲×۷=۱۴

ب-آیا این عددها نسبت به عددی که شمارنده های اول آن ۷و۱۳ باشند ، اول است ؟

خیر- زیرا شمارنده مشترک ۷ را دارند . پس نسبت به هم اول نیستند .

مثال۵ : اگر تعداد عدد های اول کمتر از ۳۵ ، ۱۱ عدد باشند ، تعداد عدد های مرکب کمتر از ۳۵ ، چند تا است ؟ چرا ؟

عدد های طبیعی سه بخش می شوند : یک ، عدد اول ، عدد مرکب .در اینجا از ۳۵ عدد ،۱۱ عدد ، اول هستند و یکی دیگر از آن ۳۵عدد ، عدد یک است (که نه اول و نه مرکب است) . در نتیجه (۱۲=۱۱+۱) ۱۲ عدد از ۳۵ عدد مرکب نیستند،

پس تعداد عدد های مرکب کمتر از ۳۵ : ۳۵-۱۲=۲۳

مثال۶ : مجموع دو عدد اول ۲۵ ، است . حاصل ضرب آن دو عدد را بدست آورید .

هرگاه مجموع یا تفاضل دو عدد طبیعی ، عددی فرد باشد یکی از آنها زوج و دیگری فرد بوده است. در اینجا چون ذکر شده مجموع دو عدد اول ،پس می نویسیم : (۲۵ = عدد زوج اول + عدد فرد اول) وچون تنها عدد زوج اول عدد ۲ می باشد ؛ پس داریم :

$$۲۳ \times ۲ = ۴۶ \longrightarrow \boxed{۲۳} + \boxed{۲} = ۲۵$$

مثال۷: عدد های ۱۵ و ۲۱ دو شمارنده یک عدد هستند . شش شمارنده دیگر این عدد را بنویسید .

۱۰۵ و ۳۵ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ ← دیگر های شمارنده $\begin{cases} ۱۵=۳\times۵ \\ ۲۱=۳\times۷ \end{cases}$

۳×۵×۷=۱۰۵ ۵×۷=۳۵

توجه کنید که یک شمارنده همه عدد ها است و چون در ساختار ۱۵ و ۲۱ عدد های ۳ و ۵ و ۷ وجود دارد پس در واقع در ساختار عدد اصلی هم باید وجود داشته باشند و در نهایت حاصل ضرب این عدد ها (یعنی ۳ و ۵ و ۷) نیز در ساختار عدد اصلی وجود دارد.



۱. الف- چهار عدد مرکب بنویسید که شمارنده اولی غیر از ۳ و ۵ نداشته باشند .

ب-آیا این عدد ها نسبت به عددی که شمارنده های اول آن ۲ و ۱۱ باشند،اول است؟چرا؟

۲. اگر تعداد عدد های اول کمتر از ۴۷ ، ۱۴ عدد باشد ، تعداد عدد های مرکب چند تا است ؟ چرا ؟

۳. تفاضل(اختلاف) دو عدد اول ۴۵ است.آن دو عدد را بیابید و مجموع آنها را حساب کنید.

۴. دو عدد ۲۲ و ۳۵ نسبت به هم اول هستند. ک.م.م آنها را بدست آورید .

۵. ب.م.م عدد های زیر را بدست آورید .

=(۲۹ و ۲۳)　　=(۲۰ و ۴)　　=(۱۵ و ۱۶)

=(۱ و ۱۸)　　=(۵۵ و۷۷)　　=(۴۵ و۱۸)

۶. عدد های ۱۴ و ۶ دو شمارنده یک عدد هستند . شش شمارنده دیگر برای این عدد بنویسید .



درس دوم : تعیین اعداد اول

یادآوری چند قاعده بخشپذیری؛

۱.بخشپذیری بر ۲: عددی بر ۲ بخشپذیر است که رقم یکان آن ۰و۲و۴و۶و۸ باشد.(یا زوج باشد)

۲.بخشپذیری بر ۳: عددی بر ۳ بخشپذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخشپذیر باشد.

۳.بخشپذیری بر ۵: عددی بر ۵ بخشپذیر است که رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد.

برای تعیین عدد های اول از روش غربال استفاده می کنیم .

در این روش ، در واقع عدد های غیر اول را خط می زنیم تا عدد های اول باقی بمانند . به این ترتیب که :

۱.ابتدا عدد یک را خط می زنیم . (زیرا یک نه اول است و نه مرکب)

۲.عدد ۲ ، اول است و همه مضرب های آن بجز خود ۲ ، مرکب هستند . پس : همه مضرب های عدد ۲را ، به جز خود ۲، خط می زنیم .

۳.عدد ۳ ، اول است . تمام مضرب های عدد ۳ را ، به جز خود ۳ خط می زنیم .

و به همین ترتیب خط زدن را تا عدد اولی که مربع (توان دوم) آن بین عدد های نوشته شده نباشد ، ادامه می دهیم .

دقت کنید ؛ در اینجا اولین مضرب مرکب هر عدد اول که برای اولین بار خط می خورد ، توان دوم آن عدد اول است .

مثلا اولین مضرب مرکب ۵ که برای اولین بار خط می خورد ، $۲۵ = ۵^۲$ می باشد و در نهایت اعداد خط نخورده باقی مانده ، اول هستند .

مثال۱ : می خواهیم عدد های اول بین ۱ تا ۳۰ را بیابیم.

۱.ابتدا عدد یک خط می خورد.

~~۱~~ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰

۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰

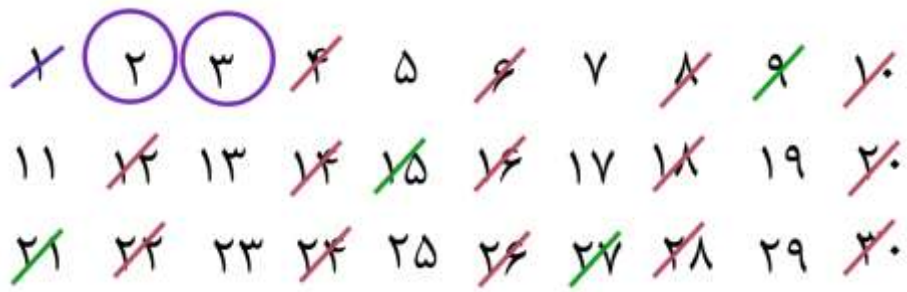
۲.عدد ۲ اول است پس اولین مضرب مرکب ۲ که خط می خورد ، مربع ۲ یعنی ۴ می باشد و بعد از آن می توان گفت بقیه ی مضرب های مرکب ۲ را به صورت ۲ تا ۲ تا بعد از ۴ خط می زنیم .(یعنی ... و ۸ و ۶ و ۴)

~~۱~~ (۲) ۳ ~~۴~~ ۵ ~~۶~~ ۷ ~~۸~~ ۹ ~~۱۰~~

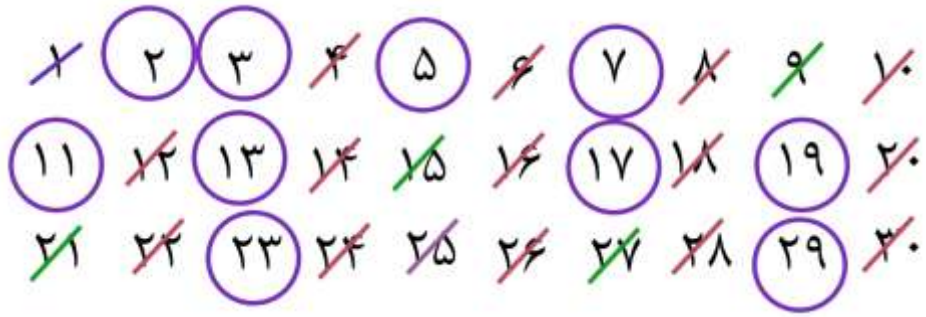
۱۱ ~~۱۲~~ ۱۳ ~~۱۴~~ ۱۵ ~~۱۶~~ ۱۷ ~~۱۸~~ ۱۹ ~~۲۰~~

۲۱ ~~۲۲~~ ۲۳ ~~۲۴~~ ۲۵ ~~۲۶~~ ۲۷ ~~۲۸~~ ۲۹ ~~۳۰~~

۳.عدد ۳ اول است و مضرب های مرکب آن که هنوز خط نخورده اند را با شروع از ۹(یعنی مربع عدد۳) به صورت ۳تا ۳تا خط می زنیم .



۴.خط زدن را تا مربع عدد ۵ ، یعنی ۲۵ ادامه می دهیم. زیرا بعد از آن ، مربع عدد ۷ را داریم که ۴۹ می شود و چون ۴۹ از ۳۰ بزرگتر است پس کار خط زدن عدد های مرکب تمام می شود و عدد های باقیمانده که دورشان خط کشیده شده ، همه اول هستند .



مثال۲ : عدد های اول بین ۳۰ تا ۵۰ را با روش غربال بنویسید .

راهنمایی : دقت کنید در اینجا ابتدای کار ما عدد یک نیست . در نتیجه قطعا اولین مضرب عدد اول ۲ هم که خط می خورد عدد ۴ نیست. در این سوال ها می توانید از قوانین بخشپذیری برای یافتن اولین مضرب مرکب عدد اول (در اینجا عدد ۲) استفاده کنید.

توجه داشته باشید که در این سوال ها هم برای بعضی از عدد های اول ، اولین مضرب مرکب همان توان دوم عدد اول است.در اینجا اولین مضرب ۲ که خط می خورد عدد ۳۲ می باشد .

۱. مضرب های عدد اول ۲ را خط می زنیم . زیرا : $۴۹ > ۴ = ۲^۲$

۳۱ ~~۳۲~~ ۳۳ ~~۳۴~~ ۳۵ ~~۳۶~~ ۳۷ ~~۳۸~~ ۳۹ ~~۴۰~~

۴۱ ~~۴۲~~ ۴۳ ~~۴۴~~ ۴۵ ~~۴۶~~ ۴۷ ~~۴۸~~ ۴۹

در اینجا اولین مضرب ۳ که خط می خورد عدد ۳۳ می باشد .

۲. مضرب های عدد اول ۳ را خط می زنیم . زیرا : $۴۹ > ۹ = ۳^۲$

۳۱ ~~۳۲~~ ~~۳۳~~ ~~۳۴~~ ۳۵ ~~۳۶~~ ۳۷ ~~۳۸~~ ~~۳۹~~ ~~۴۰~~

۴۱ ~~۴۲~~ ۴۳ ~~۴۴~~ ~~۴۵~~ ~~۴۶~~ ۴۷ ~~۴۸~~ ۴۹

در اینجا اولین مضرب ۵ که خط می خورد عدد ۳۵ می باشد .

۳. مضرب های عدد اول۵ را خط می زنیم . زیرا : $۵^۲ = ۲۵ < ۴۹$



در اینجا اولین مضرب ۷ که خط می خورد همان مربع عدد ۷ یعنی ۴۹ می باشد و چون مربع عدد اول بعدی یعنی ۱۱، برابر ۱۲۱ می شود و از ۴۹ بزرگتر است پس کار خط زدن تمام می شود

۴. مضرب های اول ۷ را خط می زنیم . زیرا : $۷^۲ = ۴۹$ و اعداد باقیمانده همان اعداد اول در فاصله ۳۰ تا ۵۰ می باشند .





تشخیص اول یا مرکب بودن هر عدد طبیعی ؛

مطابق روش غربال باید مشخص شود عدد مورد نظر مضرب عدد های اول می باشد یا خیر .

برای تشخیص ، باید عدد مورد نظر را بر اعداد اول مانند ... و ۷ و ۵ و ۳ و ۲ تقسیم کرد .

اگر عدد داده شده بر یکی یا بیشتر ، از اعداد اول ، بخشپذیر باشد (باقیمانده صفر شود) ، عدد داده شده مرکب است .

اگر عدد داده شده بر هیچ کدام از اعداد اول بخشپذیر نباشد (باقیمانده صفر نشود) ، عدد داده شده اول است .

برای تعیین تعداد این تقسیم ها ، از عدد مورد نظر جذر تقریبی می گیریم و سپس عدد داده شده را بر اعداد اول کوچکتر از جذر

تقسیم می کنیم .

مثال۳ : می خواهیم مشخص کنیم عدد ۳۷ ، عدد اول است یا مرکب ؟

ابتدا جذر تقریبی عدد ۳۷ را می گیریم ($\sqrt{۳۷} \simeq ۶/۱$ $\sqrt{۳۶} < \sqrt{۳۷} < \sqrt{۴۹} = ۷$ $۶ =$)

پس ۳۷ را بر اعداد اول کوچکتر از ۶ (یعنی ۲ و ۳ و ۵) تقسیم می کنیم .

- یکان ۳۷ فرد است پس بر ۲ بخش پذیر نیست.
- مجموع ارقام ۳۷ عدد ۱۰ است و بر ۳ بخش پذیر نیست.
- یکان ۷ است و بر ۵ بخشپذیر نیست(یکانش صفر یا ۵ نیست.)

چون بر هیچ کدام از اعداد اول ۲ و ۳ و ۵ بخش پذیر نیست ، پس: ۳۷ یک عدد اول است.

مثال۴ : مشخص کنید عدد ۹۳ اول است یا مرکب ؟

ابتدا جذر تقریبی عدد ۹۳ را محاسبه می کنیم. $\sqrt{۹۳} \simeq ۹/۶$ $\sqrt{۸۱} < \sqrt{۹۳} < \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$ $۹ =$

پس عدد ۹۳ را بر عددهای اول کوچکتر از ۹ (یعنی ۲و۳و۵و۷) تقسیم می کنیم

- یکان ۹۳ فرد است پس بر ۲ بخش پذیر نیست.
- مجموع ارقام ۹۳ عدد ۱۲ است و بر ۳ بخش پذیر است.

عدد ۹۳ بر ۳ بخش پذیر است پس: ۹۳ یک عدد مرکب است

مثال۵ : عددی کمتر از ۱۶۰ و بزرگتر از ۱۳۰ می باشد . برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا خیر ، حداکثر چند تقسیم انجام می دهیم ؟ چرا ؟

در اینجا چون عدد مورد نظر دقیقا مشخص نشده باید عدد بزرگتر در صورت سوال مد نظر قرار گیرد.

$\sqrt{۱۶۰} \simeq ۱۲/۶$ $\sqrt{۱۴۴} < \sqrt{۱۶۰} < \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$ $۱۲ =$

پس بر اعداد اول کوچکتر از ۱۲ باید تقسیم شود. یعنی بر ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ پس یعنی حداکثر ۵ تقسیم .

توجه کنید که در اینجا فقط تعداد تقسیم ها پرسیده شده و هیچ تقسیمی انجام نمی شود زیرا عدد مورد نظر دقیقا داده نشده است .

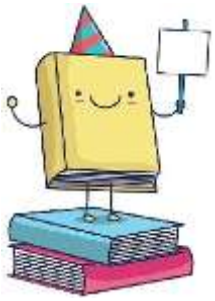
مثال۶ : عددهای ۱ تا ۹۰ را نوشته و غربال کرده ایم . با توجه به آن به سوالات زیر پاسخ دهید :

الف-اولین عددی که خط می خورد ؟ عدد یک ب-اولین مضرب مرکب ۷ که برای اولین بار خط می خورد ؟ عدد ۴۹

پ-عدد ۵۷ با مضرب کدام عدد خط می خورد ؟ عدد ۳

ت-تمام مضرب های ۵ که برای بار اول خط می خورند ، را بنویسید . ۲۵-۳۵-۵۵-۶۵-۸۵

تمرین



۱.عددهای اول بین ۱ تا ۳۸ را با استفاده از روش غربال بنویسید .

۲.عددهای اول بین ۳۵ تا ۷۰ را با روش غربال مشخص کنید .

۳.با روش تقسیم کردن مشخص کنید که عددهای ۸۳ و ۱۴۳ اول هستند یا مرکب ؟

۴.عددی کمتر از ۱۱۰ و بزرگتر از ۹۳ می باشد . برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا خیر ، حداکثر چند تقسیم باید انجام شود؟چرا؟

۵.میانگین اعداد اول در مجموعه { ۳۲و۳و۱۱و۱و۲۱ } را بدست آورید .

۶.عددهای ۸۰ تا ۱۳۰ را نوشته و غربال کرده ایم . با توجه به آن به سوالات زیر پاسخ دهید :

الف-اولین عددی که خط می خورد ؟

ب-اولین مضرب مرکب ۳ که خط می خورد ؟

پ-تمام مضرب های عدد ۵ که برای اولین بار خط می خورند ؟

ت-عدد ۹۱ با مضرب کدام عدد خط می خورد ؟