

توان و جذر

تعریف: عبارت‌هایی مانند $۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲$ را در ریاضیات برای شماره‌ترسیدن بصورت $۱۲^۴$ می‌نویسیم.

و آن را چنی می‌خوانیم: دوازده به توان چهار! در عبارت $۱۲^۴$ ، دوازده را پایه و ۴ را توان می‌گوییم.

درست نیست! همان طوری که در خلاصه کردن جمع اعداد می‌داریم، حالا ضرب را خلاصه می‌کنیم.

$$۱۲ + ۱۲ + ۱۲ + ۱۲ = ۴ \times ۱۲ = ۴۸$$

$$۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲ = ۱۲^۴ = ۲۰۷۳۶$$

مثال: حاصل عبارت‌ها را بدست آورید.

(الف) $۷^۳ = ۷ \times ۷ \times ۷ = ۳۴۳$

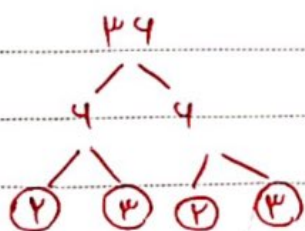
(ب) $\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ = \frac{۳}{۲} \times \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۴}$

(ج) $(۰.۲)^۴ = ۰.۲ \times ۰.۲ \times ۰.۲ \times ۰.۲ = ۰.۰۰۱۶$

مثال: عدد ۱ به توان هر عددی برابر ۱ است.

$$۱^۴ = ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱$$

تذکره: در تجزیه اعداد به اعداد اول نیز می‌توان آن‌ها را بصورت توانی نوشت برای مثال:



$$۳۶ = ۲^۲ \times ۳^۲$$

مثال: اگر عددی توان داشته باشد می‌توان آن را به دو شکل نوشت.

مثال: اگر عددی توان نداشته باشد و فقط آن کسر باشد آن کوه توان هم برای قدرت و هم

برای خروج است! رسی اگر بداند زناشته باشد، توان را فقط برای صورت کسر در نظر می‌گیریم.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9} \quad \frac{2^2}{3} = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3}$$

و اگر توان فقط در خروج کسر بود، فقط خروج به توان می‌رسد مثال:

$$\frac{3}{5^2} = \frac{3}{5 \times 5} = \frac{3}{25} \quad \frac{4}{7^4} = \frac{4}{7 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{4}{2401}$$

این نکته را در نظر داشته باشید که مربع یا جذور یک عدد یعنی آن عدد را به توان ۲ برسانیم و مطلب یک عدد یعنی آن عدد را به توان ۳ برسانیم.

$$5^2 = 25 \quad \text{مربع عدد ۵} \\ 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125 \quad \text{مکعب عدد ۵}$$

پس توان مسائل اعداد منفی

اگر اعداد منفی به توان عددهای زوج برسند، حاصل مثبت است و اگر به توان عددهای فرد برسند، حاصل

$$(-2)^2 = -2 \times -2 = +4 \quad \text{عدد منفی است. به طور مثال:} \\ (-2)^3 = -2 \times -2 \times -2 = -8$$

اگر عدد منفی به توان عددهای زوج برسد، یا بدون یا بدون بداند در حاصل تفاوت بدست می‌آید

$$(-2)^4 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 = +16 \quad \text{به طور مثال: توان هم برای عدد هم علامت!}$$

$$-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16 \quad \text{توان فقط روی عدد است}$$

نکته: عدد صفر توان هر عددی توان صفر است و عدد در توان صفر برابر ۱ است.

$$0^{10} = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$$

$$1^0 = 1$$

$$(-12)^0 = 1$$

محاسبات عبارت ها توان دار

ضرب اعداد توان دار: (۱) پایه ها یکسان: اگر در ضرب اعداد توان دار پایه ها یکسان

بوده یکی از پایه ها را مرتبه نویسیم و توان ها را جمع می کنیم به طور مثال:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(1) \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^7 = \left(\frac{4}{3}\right)^{2+7} = \left(\frac{4}{3}\right)^9$$

$$(2) 49 \times 7^3 = 7 \times 7 \times 7^3 = 7^2 \times 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$$

* در عبارت بالا برای انجام محاسبه تبدیل پایه انجام داریم یعنی عدد ۴۹ را به صورت 7^2 می نویسیم.

(۲) توان ها یکسان: اگر در ضرب اعداد توان دار توان ها یکسان بوده یکی از توان ها را

مرتبه نویسیم و پایه ها را در هم ضرب می کنیم به طور مثال:

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m = (ab)^m$$

$$(1) 7^3 \times (-2)^3 = (7 \times -2)^3 = (-14)^3$$

$$(2) \left(\frac{2}{5}\right)^7 \times \left(\frac{7}{10}\right)^7 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{7}{10}\right)^7 = \left(\frac{7}{25}\right)^7$$

* در عبارت بالا وقتی پایه ها را در هم ضرب کردیم اول ساده کردیم بعد ضرب انجام دادیم!

(۳) نه باید نه توان (بسیار) : الف) باید های توان را یکی کنیم : $2^3 \times 8 = 2^3 \times 2^3 = 2^6$

ب) باید یک به توان رساند و بعد ضرب کنیم : $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$

(۴) به توان رساندن اعداد توان دارد. برای به توان رساندن اعداد توان دیگر را ضرب می کنند

و توان ها را در هم ضرب کنیم : $(a^m)^n = a^{mn}$

بدون برابر نشدن $2^{3^2} = 2^9$ * برابر نشدن $(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

سوال : حاصل عبارات زیر را بدست آورید

الف) $2^3 \times 3^4 \times 4$

$$2^3 \times 3^4 \times \underbrace{2^2 \times 3^1}_4 = 2^5 \times 3^5$$

$$\text{ب) } v^0 \times (3/5)^4 \times \left(\frac{v}{r}\right)^1 = 1 \times \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^4}_\frac{v}{r} \times \frac{v}{r} = \left(\frac{v}{r}\right)^4 \times \frac{v}{r} = \left(\frac{v}{r}\right)^5$$

$$\text{ج) } (3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2) \times (4^2 + 4^2 + 4^2) = \underbrace{4 \times 3^2}_{\text{نوع ۱ ضرب}} \times \underbrace{3 \times 4^2}_{\text{نوع ۲ ضرب}} = 4^3 \times 3^3 = 12^3$$

نام و نام خانوادگی:

نام درس: حساب

نام کلاس:

علوی

مؤسسه علمی آموزشی علوی

پایه تحصیلی: هفتم متوسطه

زمان پیشنهادی: ۴۵ دقیقه

تاریخ برگزاری آزمون: ۹۹/۱۱/۱۸

ردیف	سؤالات حساب همگام ۳ هفتم متوسطه	بارم
۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. (الف) هر عدد طبیعی حداقل یک شمارنده اول دارد. (ب) عدد ۱۲ شمارنده عدد ۴ است. (پ) کوچکترین شمارنده مشترک هر دو عدد طبیعی، عدد یک است. (ت) اگر a و b عددهای اول باشند آن گاه ab نیز اول است.	درست نادرست ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ۱ نمره
۲	در جاهای خالی عدد یا کلمه مناسب بگذارید. (الف) سومین مضرب حسابی عدد ۳، عدد است. (ب) عدد ۴۲، به تعداد تا شمارنده اول دارد. (پ) مجموع دو عدد طبیعی فرد حتماً مضرب عدد طبیعی است. (ت) اگر a و b عددهای اول باشند آن گاه (a,b) برابر با است.	۱ نمره
۳	مناسب ترین گزینه را انتخاب کنید. (الف) ب.م.م عدد ۹ با کدام یک از عددهای زیر عدد یک می شود؟ ۱۶ (۱) ۱۵ (۲) ۳ (۳) ۹ (۴) (ب) اگر عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b بخش پذیر باشد، آن گاه $[a,b]$ با کدام گزینه برابر است؟ ۱ (۱) ab (۲) a (۳) b (۴) (پ) تعداد شمارنده های اول کدام عدد از بقیه بیشتر است؟ ۱۰۰ (۱) ۷۵ (۲) ۶۴ (۳) ۳۰ (۴) (ت) اگر $(a,b)=a$ و a عددی اول باشد، کدام گزینه درست است؟ (۱) b عددی اول است (۲) $b=1$ (۳) a شمارنده b است (۴) b از a کوچکتر است	۱ نمره
۴	(الف) با شمارنده های ۳ و ۵ چند عدد تولید می شود که بین ۴۰ و ۵۰ باشد؟ (ب) عددهای اول بین ۳۰ و ۵۰ را بنویسید. (پ) عددی به صورت $2 \times 2 \times 3 \times 5$ است. چهار شمارنده غیر اول این عدد را بنویسید.	۲/۷۵ نمره
۵	شمارنده های اول عدد ۴۰ را با رسم نمودار درختی پیدا کنید و آن ها را به صورت ضرب شمارنده اول بنویسید.	۱/۵ نمره
۶	(الف) تساوی ها را کامل کنید. $1) (9,8) =$ $2) [4,9] =$ $3) [42,28] =$ (ب) اگر عدد $A = 2 \times 3 \times 5$ و عدد $B = 2 \times 3 \times 3$ باشند آن گاه تساوی ها را کامل کنید. $(A,B) =$ $[A,B] =$	۲ نمره
۷	ب.م.م دو عدد ۱۲ و ک.م.م آن ها ۷۲ است. اگر یکی از عددها ۳۶ باشد، عدد دیگر را به دست آورید.	۰/۷۵ نمره

پاسخنامه حساب همگام ۳ هفتم متوسطه

ردیف

الف) نادرست - (۲۵/۰) (نمره) چون عدد یک طبیعی است ولی شمارنده اول ندارد. (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - عدد اول - صفحه ۵۷ کتاب درسی) (متوسط)

ب) نادرست - (۲۵/۰) (نمره) عدد ۱۲ مضرب ۴ است. (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - ک.م.م - صفحه ۶۶ کتاب درسی) (آسان)

پ) درست - (۲۵/۰) (نمره) (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - ب.م.م - صفحه ۶۴ کتاب درسی) (متوسط)

ت) نادرست - (۲۵/۰) (نمره) چون حاصل ab بر a و b بخش پذیر خواهد بود. (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - شمارنده اول - صفحه ۶۱ کتاب درسی) (متوسط)

الف) عدد ۶ - (۲۵/۰) (نمره) (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - ک.م.م - صفحه ۶۵ کتاب درسی) (متوسط)

ب) ۳ تا - (۲۵/۰) (نمره) (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - شمارنده اول - صفحه ۵۹ کتاب درسی) (متوسط)

پ) ۲ - (۲۵/۰) (نمره) چون جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود و عددهای زوج حتماً مضرب ۲ هستند. (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - عدد اول - صفحه ۵۸ کتاب درسی) (متوسط)

ت) یک - ب.م.م دو عدد اول یک است. (۲۵/۰) (نمره) (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - ب.م.م - صفحه ۶۴ کتاب درسی) (آسان)

الف) گزینه «۱» - (۲۵/۰) (نمره) (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - ب.م.م - صفحه ۶۴ کتاب درسی) (متوسط)

ب) گزینه «۳» - (۲۵/۰) (نمره) a (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - ک.م.م - صفحه ۶۷ کتاب درسی) (متوسط)

پ) گزینه «۴» - (۲۵/۰) (نمره)

عدد ۳۰، ۳ تا شمارنده اول دارد. ۲ و ۳ و ۵

عدد ۱۰۰ دو تا شمارنده اول دارد. ۲ و ۵

عدد ۷۵ دو تا شمارنده اول دارد. ۳ و ۵

عدد ۶۴ فقط یک شمارنده اول دارد. ۲

(فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - شمارنده اول - صفحه ۶۱ کتاب درسی) (متوسط)

ت) گزینه «۳» - (۲۵/۰) (نمره) a شمارنده b است. (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - ب.م.م - صفحه ۶۴ کتاب درسی) (متوسط)

الف) عددهای بین ۴۰ و ۵۰ را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم.

$$۴۱ = \text{عدد اول} *$$

$$۴۲ = ۲ \times ۳ \times ۷ *$$

$$۴۷ = \text{عدد اول} *$$

$$۴۳ = \text{عدد اول} *$$

$$۴۸ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ *$$

$$۴۴ = ۲ \times ۲ \times ۱۱ *$$

$$۴۹ = ۷ \times ۷ *$$

$$۴۵ = ۳ \times ۳ \times ۵ \checkmark$$

$$۴۶ = ۲ \times ۲۳ *$$

بنابراین فقط عدد ۴۵ با شمارنده‌های ۳ و ۵ تولید می‌شود. (۵/۰) (نمره) (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - شمارنده اول - صفحه ۶۱ کتاب درسی) (متوسط)

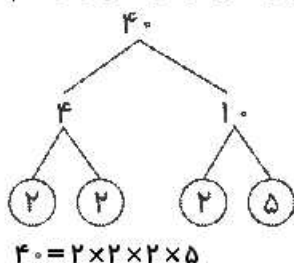
ب) ۴۷، ۴۳، ۴۱ و ۳۷ (۱/۲۵) (نمره) (هر مورد ۲۵/۰) (نمره) (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - صفحه ۶۸ کتاب درسی) (متوسط)

پ) ۳۰ و ۲۰ و ۱۲ و ۱۰ و ۱۵ و ۶ و ۴

(مصحح محترم این سوال باز پاسخ است، چهار مورد از موارد بالا را نوشته باشد، درست است)

(۱ نمره) (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - شمارنده اول - صفحه ۶۰ کتاب درسی) (متوسط)

(مصحح محترم به هر طریقی جواب رسیده باشد درست است مثلاً به جای ۴×۱ یا ۲×۲ یا ۵×۸ نیز نمودار درختی را رسم کرده باشد درست است.)



(۱/۵) (نمره) (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - شمارنده اول - صفحه ۵۹ کتاب درسی) (متوسط)

الف) (۵/۰) (نمره) $[42, 28] = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$	ب) (۵/۰) (نمره) $[4, 9] = 36$	ج) (۵/۰) (نمره) $(9, 8) = 1$
$42 = 2 \times 3 \times 7$	$28 = 2 \times 2 \times 7$	$(A, B) = 2 \times 3 = 6$
(ب) (۵/۰) (نمره) $[A, B] = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$		
(فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - ک.م.م - صفحه ۶۷ کتاب درسی) (متوسط)		
ب.م.م $\times$ ک.م.م = عدد اول $\times$ عدد دوم	$[a, b] = 72$	$(a, b) = 12$
	$36 \times b = 12 \times 72$	$a = 36$
	$b = \frac{12 \times 72}{36} = 24$	$b = ?$
(۷۵/۰) (نمره) (فصل پنجم - شمارنده‌ها و عددهای اول - ک.م.م - صفحه ۶۷ کتاب درسی) (متوسط)		