

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۴» - دو حالت را در نظر می گیریم:

الف) یکان صفر باشد:

$$\boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{1} = 210$$

فقط صفر

ب) یکان غیر صفر باشد:

$$\boxed{6} \times \boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{3} = 540$$

همه ارقام به جز صفر و یکی از ارقام ۲، ۴، ۶

و طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با:

$$210 + 540 = 750$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - آمار و احتمال - شمارش) (متوسط)

۲- گزینه «۴» - تعداد کل حالات انتخاب ۴ کتاب برابر است با:

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 8!} = 495$$

می توان از متمم این حالت استفاده کرد:

A: حداکثر ۳ کتاب ریاضی باشد.

A': هر ۴ کتاب ریاضی باشد.

$$\binom{5}{4} = 5$$

پس تعداد حالات مطلوب مسئله برابر است با:

$$495 - 5 = 490$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - آمار و احتمال - شمارش) (متوسط)

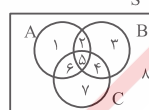
۳- گزینه «۲» -

$$P(A') = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{7^4} = \frac{120}{2401} = \frac{120}{343}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{120}{343} = \frac{343 - 120}{343} = \frac{223}{343}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - آمار و احتمال - احتمال) (متوسط)

۴- گزینه «۱» - مجموعه های A, B و C را به صورت فرضی در نظر می گیریم:



$$A - B = \{1, 2, 5, 6\} - \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 6\}$$

$$(A - B)' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$B - C = \{2, 3, 4, 5\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{2, 3\}$$

حال داریم:

$$((A - B)' - (B - C)) - C = ((\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{2, 3\})) - \{4, 5, 6, 7\} = \{4, 5, 6, 8\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{8\}$$

بررسی گزینه «۱»:

$$A' - (B \cup C) = \{3, 4, 7, 8\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{8\}$$

بنابراین گزینه «۱» صحیح است.

(یگانه) (پایه دوازدهم - آمار و احتمال - اعمال روی پیشامدها) (متوسط)

۵- گزینه «۱» - تعداد اعضای فضای نمونه ای (تعداد کل حالات قرارگیری این ۷ نفر)

$$n(s) = 7!$$

پیشامد مطلوب آن است که ۳ نفر بین دو برادر قرار بگیرند.

$$n(A) = \binom{5}{3} \times \overset{\uparrow}{3!} \times \overset{\uparrow}{2!} \times \overset{\uparrow}{3!}$$

جایگشت بسته ۵ نفره
جایگشت ۲ برادر
جایگشت ۳ نفر
انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر
به همراه ۲ نفر دیگر
برای قرارگیری بین ۲ برادر

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{3} \times 3! \times 2! \times 3!}{7!} = \frac{10 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3!}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!} = \frac{1}{7}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - آمار و احتمال - احتمال) (متوسط)

۶- گزینه «۲» - اندازه گیری وزن در گام دوم صورت می گیرد و بهترین روش گردآوری داده ها در اینجا مشاهده (و آزمایش و بررسی) است.

(یگانه) (پایه دوازدهم - آمار و احتمال - چرخه آمار در حل مساله) (آسان)

۷- گزینه «۳» -

$$\bar{x} = \frac{45 + 49 + 41 + 37 + 43}{5} = \frac{215}{5} = 43 \Rightarrow \boxed{a = 43}$$

$$\sigma^2 = \frac{(45 - 43)^2 + (49 - 43)^2 + (41 - 43)^2 + (37 - 43)^2 + (43 - 43)^2}{5} =$$

$$\frac{4 + 36 + 4 + 36 + 0}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

$$\sigma = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow b = \bar{x} + \sigma = \boxed{43 + 4 = 47}$$

$$b \text{ و } a \text{ میانگین} = \frac{43 + 47}{2} = 45$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - آمار و احتمال - چرخه آمار در حل مسائل) (متوسط)

۸- گزینه «۲» - فرض کنیم $a_1 = k$ باشد:

$$\xrightarrow{n=1} a_1 = 3a_1 + 1 = 3k + 1$$

$$\xrightarrow{n=2} a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}(3k + 1) = \frac{3k + 1}{2}$$

$$\xrightarrow{n=3} a_3 = 3a_2 + 1 = 3\left(\frac{3k + 1}{2}\right) + 1 = \frac{9k + 3}{2} + 1$$

طبق فرض سوال مقدار a_4 برابر $\frac{15}{2}$ است پس:

$$\frac{9k + 3}{2} + 1 = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{9k + 3 + 2}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{9k + 5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$9k + 5 = 15 \Rightarrow 9k = 15 - 5 \Rightarrow 9k = 10 \Rightarrow k = \frac{10}{9}$$

پس $a_1 = k = \frac{10}{9}$ است. (یگانه) (پایه دوازدهم - مدل سازی و دنباله - دنباله بازگشتی) (دشوار)

۹- گزینه «۳» - دنباله بازگشتی $a_n = a_{n+1} + 1, a_1 = a_2 = 1$ فیبوناچی است.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

جمله دوازدهم

$$a_n = n^2 \Rightarrow 144 = n^2 \xrightarrow{n>0} n = 12$$

نکته: جمله عمومی $a_n = n^2$ مربوط به دنباله مربعی است که دنباله آن به

صورت $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ است. (یگانه) (پایه دوازدهم - مدل سازی و دنباله - دنباله فیبوناچی) (متوسط)

۱۰- گزینه «۴» - دنباله داده شده یک دنباله حسابی است که در آن $d = \frac{3}{2}$ است.

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 8 = a_1 + 4\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 8 = a_1 + 6 \Rightarrow 8 - 6 = a_1 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(2(2) + (15-1)\left(\frac{3}{2}\right))$$

$$= \frac{15}{2}(4 + (14 \times \frac{3}{2})) = \frac{15}{2}(4 + 21) = \frac{15}{2}(25) = 187 \frac{1}{2}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - دنباله - دنباله حسابی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» -

$$a_7 + a_{13} = 48 \Rightarrow a_1 + 6d + a_1 + 12d = 48$$

$$2a_1 + 18d = 48$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1 + (19-1)d) = \frac{19}{2}(2a_1 + 18d) \underline{\underline{2a_1 + 18d = 48}}$$

$$19(24) = 456$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - دنباله - دنباله حسابی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» - پس از هر بار شیمی درمانی ۳۰ درصد از سلول‌ها باقی می‌ماند، پس یک دنباله

هندسی داریم که $r = \frac{300}{100} = \frac{3}{10}$ است و تعداد سلول‌ها پس از چهار بار شیمی درمانی برابر

است با:

$$a_5 = a_1 r^4 \Rightarrow a_5 = 2 \times 10^4 \times \left(\frac{3}{10}\right)^4 = 2 \times 10^4 \times \frac{81}{10000} = 162 \times 10^0$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - دنباله - دنباله هندسی) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» -

$$a_7, a_5, a_6 \xrightarrow{\text{هندسی}} (a_5)^2 = a_7 \times a_6 \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 5d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 5a_1d + a_1d + 5d^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 - a_1^2 - 6a_1d - 5d^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2a_1d + 11d^2 = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از d}} d(2a_1 + 11d) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 2a_1 + 11d = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a_1 = -11d \Rightarrow a_1 = -\frac{11}{2}d$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - دنباله - ترکیب دنباله حسابی و هندسی) (دشوار)

۱۴- گزینه «۳» -

$$a_3 \times a_5 = 4a_7 \Rightarrow a_1 r^2 \times a_1 r^4 = 4a_1 r^6$$

$$a_1^2 r^6 = 4a_1 r^6 \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{حذف } a_1 r^6} a_1 = 4$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - دنباله - دنباله هندسی) (آسان)

۱۵- گزینه «۳» -



چهار نیمه‌عمر طول می‌کشد تا مقدار دارو از ۶۰۰ میلی‌گرم به کم‌تر از ۴۰ میلی‌گرم برسد:

$$4 \times 45 = 180 \text{ دقیقه}$$

$$\frac{180}{60} = 3 \text{ ساعت}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - دنباله - دنباله هندسی) (آسان)

۱۶- گزینه «۱» -

$$\frac{x^3 \times 3^5 \times 4^6}{2^4 \times 3^6 \times 4^1} = 3^8 \Rightarrow \frac{x^3 \times 3^5}{2^4 \times 2^2} = 3^8$$

$$\Rightarrow x^3 \times 3^5 = 2^6 \times 3^8 \Rightarrow x^3 = 2^6 \times 3^3 \Rightarrow x^3 = (2^2)^3 \times 3^3$$

$$\Rightarrow x^3 = 4^3 \times 3^3 \Rightarrow x^3 = 12^3 \Rightarrow x = 12$$

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{2(12)+1} = \sqrt{25} = 5$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - ریشه nام و توان گویا - معادلات توانی) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» -

$$\sqrt[5]{25\sqrt{5}} = \sqrt[5]{25 \times 5^{\frac{1}{2}}} = (5^2 \times 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{2}{5}} \times 5^{\frac{1}{10}} = 5^{\frac{2}{5} + \frac{1}{10}} = 5^{\frac{4}{10} + \frac{1}{10}} = 5^{\frac{5}{10}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

از طرفی:

$$(25)^{-1/5} = 25^{-\frac{2}{10}} = (4 \times 5)^{-\frac{2}{10}} = (2^2)^{-\frac{2}{10}} \times 5^{-\frac{2}{10}} = 2^{-\frac{2}{5}} \times 5^{-\frac{2}{10}}$$

در نهایت:

$$A = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{2}{5}} \times 2^{-\frac{2}{5}} = 5^{-1} \times 2^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{40}$$

$$\left(\frac{1}{A} + 9\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{40}} + 9\right)^{\frac{1}{2}} = (40 + 9)^{\frac{1}{2}} = (49)^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - ریشه nام و توان گویا - توان و رادیکال) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» - طبق رابطه $f(t) = c(1+r)^t$ مقدار نهایی از رابطه $f(t) = 5(4)^t$ به دست

می‌آید از آن‌جا که ۱۰ دقیقه برابر $\frac{1}{6} = \frac{1}{60}$ ساعت است پس $t = \frac{1}{6}$ است و داریم:

$$f(t) = 5(4)^{\frac{1}{6}} = 5(2^2)^{\frac{1}{6}} = 5 \times 2^{\frac{2}{3}} = 5\sqrt[3]{2} \xrightarrow[\sqrt[3]{2} = 1/25]{\text{طبق اطلاعات مسئله}} 5 \times 1/25 = 6/25$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - تابع نمایی - مسائل رشد) (دشوار)

۱۹- گزینه «۴» - در توابع نمایی به صورت $y = k^x$ هر چه k بزرگ‌تر باشد نمودار در سمت

چپ محور x ها پایین‌تر قرار می‌گیرد؛ پس تا اینجا $(b > a)$ است. ضمناً هر دو تابع کاهشی

(نزولی) هستند پس در هر دو تابع مقدار k بین صفر و یک است. پس:

$$0 < a < b < 1$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - تابع نمایی - نمودار تابع نمایی) (آسان)

۲۰- گزینه «۱» -

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = 4^x \Rightarrow 2^{-x+2} = (2^2)^x$$

$$\Rightarrow 2^{-x+2} = 2^{2x} \Rightarrow -x+2 = 2x \Rightarrow -x-2x = -2$$

$$\Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - تابع نمایی - تلاقی نمودارها) (متوسط)