

حسابان

۱- گزینه «۱» - تابع انتقال یافته را نوشته و با خط $y = 2x$ تقاطع داده و شرط مماس بودن یعنی $\Delta = 0$ را بررسی می‌کنیم:

$$y = (x-3)^2 - 4(x-3) + a = x^2 - 6x + 9 - 4x + 12 + a = x^2 - 10x + 21 + a \\ \Rightarrow x^2 - 10x + 21 + a = 2x \Rightarrow x^2 - 12x + (a+21) = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 144 - 4(a+21) = 0 \Rightarrow 36 - (a+21) = 0 \Rightarrow a+21 = 36 \Rightarrow a = 15$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - انتقال افقی و قائم تابع - انتقال نمودار تابع) (متوسط)

۲- گزینه «۱» - می‌دانیم تابع $y_1 = a - 2x^3$ اکیدا نزولی است و می‌بایستی تابع ضابطه دوم نیز اکیدا نزولی باشد که داریم:

$$2a - 1 < 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$$

از طرفی می‌بایستی ضابطه اول پایین‌تر یا مساوی ضابطه دوم باشد که داریم:

$$x = 0 \Rightarrow a - 2(0)^3 \leq (2a-1)(0) + 2 \Rightarrow a \leq 2$$

و از اشتراک آن‌ها به $a < \frac{1}{2}$ می‌رسیم که فاقد عدد طبیعی می‌باشد.

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تابع - یکنوایی اکیدا) (متوسط)

۳- گزینه «۳» - ابتدا قضیه تقسیم را می‌نویسیم:

$$p(x) = (2x^2 - 2)Q(x) + 7x + 1$$

می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $(x-1)$ همان $R = p(1)$ خواهد بود که داریم:

$$\Rightarrow p(1) = 7x + 1 = 8$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - تابع - بخش‌پذیری) (آسان)

۴- گزینه «۲» - با توجه به رابطه $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{1}{2} \tan(2ax) \Rightarrow t = \frac{\pi}{|2a|} \xrightarrow{a > 0} \frac{\pi}{2a} = \frac{2}{2} \Rightarrow 2a = \pi \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول - مثلثات - تناوب تابع تانژانت) (متوسط)

۵- گزینه «۴» - داریم:

$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$\Rightarrow 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

و در مجموع معادله مثلثاتی دارای ۵ جواب می‌باشد.

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - مثلثات - معادله مثلثاتی) (متوسط)

۶- گزینه «۱» -

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(1^+)) = f(-\infty) = (-1)^-$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+2}{1+f \circ f(x)} = \frac{5}{1+(-1)^-} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - حد بی‌نهایت - حد بی‌نهایت (حد نامتناهی) (دشوار)

۷- گزینه «۳» - خط مجانب قائم تابع $f(x)$ را ابتدا به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x(x-2)} \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2+1}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \Rightarrow y = \frac{\Delta}{0^+} \Rightarrow +\infty \\ x < 2 \Rightarrow y = \frac{\Delta}{0^-} \Rightarrow -\infty \end{cases}$$



(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - حد بی‌نهایت - حد بی‌نهایت (حد نامتناهی) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - با تشکیل تابع مرکب داریم:

$$\text{fog}(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{fog}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \Rightarrow y=1$$

(سراسری یا تغییر) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - حد تابع - حد بی‌نهایت) (متوسط)

۹- گزینه «۴» - می‌بایستی $f'(1) = g'(1)$ و $f(1) = g(1)$ باشد که به کمک حل دستگاه خواهیم داشت:

$$f(1) = g(1) \Rightarrow \frac{a+1}{-2} = 1+b \Rightarrow a+1 = -2-2b \Rightarrow a+2b = -3$$

$$f'(1) = g'(1) \Rightarrow \frac{-3a-1}{(x-3)^2} = 1+b\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$x=1 \Rightarrow \frac{-3a-1}{4} = 1+\frac{b}{2} \xrightarrow{(\frac{1}{2}) \times} -3a-1 = 4+2b \Rightarrow 2b+3a = -5$$

$$\begin{cases} a+2b = -3 \\ 2b+3a = -5 \end{cases} \xrightarrow{-} \begin{cases} a+2b = -3 \\ -a = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = -1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول - مشتق - مفهوم مشتق) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» - با توجه به رابطه زیر می‌توان نوشت:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+ph) - f(a+qh)}{ch} = \frac{p-q}{c} \times f'(a) \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h} = \frac{2}{3} f'(2) = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = 2$$

از طرفی برای مشتق عبارت $y = f(\sqrt{3x+1})$ داریم:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' \times f'(u)$$

$$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \times f'(\sqrt{3x+1}) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{3}{4} \times f'(2) = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول - مشتق - مفهوم مشتق) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» - می‌دانیم ریشه‌های ساده مشتق اول به شرطی که در دامنه تعریف تابع باشند طول‌های نقاط اکسترمم نسبی ($\min$ یا $\max$) خواهند بود:

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 2ax + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a} = \frac{-2a}{6} = \frac{-a}{3} \Rightarrow \frac{-a}{3} = 3 \Rightarrow a = -9$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - کاربرد مشتق - اکسترمم‌های تابع) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» - می‌دانیم در نقطه عطف، تابع باید پیوسته باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$L_1 = L_2 = f(1) \Rightarrow -1 + m - 2 = 1 \Rightarrow m = 4$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس دوم - کاربردهای مشتق - کاربرد مشتق - نقطه عطف تابع) (متوسط)

۱۳- گزینه «۱» - با یافتن $y = 2 - x$ و جایگزینی آن داریم:

$$A = x^2 y = x^2 (2-x) = 2x^2 - x^3$$

$$A' = 4x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x(4-3x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{4}{3}$$

که فقط $x = \frac{4}{3}$ قابل قبول بوده و $y = 2 - x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ و برای $x^2 y$ خواهیم داشت:

$$A = x^2 y = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - کاربردهای مشتق - بهینه‌سازی) (متوسط)

۱۴- گزینه «۴» - تابع به دلیل ناپیوستگی در نقطه $x=2$ فاقد مشتق می‌باشد.

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) \left[\frac{1}{x-2} \right] = (1)(2) = 2$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) \left[\frac{1}{x-2} \right] = (1)(1) = 1$$

$$f(2) = (2-1) \left[\frac{1}{2} \right] = 2 \Rightarrow L_1 \neq L_2$$

در نقطه $x=2$ حد نداشته و ناپیوسته است.

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق - مشتق‌پذیری تابع) (متوسط)

۱۵- گزینه «۲» - در $x=1$ مشتق در عامل صفر مطرح شده است که داریم:

$$m = f'(1) \Rightarrow f(1) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{1+2}} = \frac{1}{3}$$

برای محاسبه مشتق در عامل صفر بایستی از عامل صفر، مشتق گرفته و در بقیه جملات ضرب نموده و مقدار عددی را در نقطه خواسته شده به دست آوریم.

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول - مشتق - خط مماس) (متوسط)