

هندسه

۱- گزینه «۲» - در حالت کلی برای به دست آوردن درایه سطر i ام ستون j ام ماتریس ABC می توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

(ستون j ام C) $\times$ (سطر i ام A)

بنابراین برای به دست آوردن درایه سطر اول ستون دوم ماتریس ABB حاصل ضرب زیر را محاسبه می کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -8 \\ 10 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix} = -17$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول) (آسان)

۲- گزینه «۳» - اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را ماتریس ضرایب دستگاه باشد:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a=1, b=1, c=2, d=3$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$cx + by = 2(-11) + 1(9) = -13$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم) (متوسط)

۳- گزینه «۳» -

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 & -1 \\ x & x^2 & x \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 \begin{vmatrix} x^2 & x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} x & x^2 \\ x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 + x) - (x - x^2) - (-x - x^2) = 0 \Rightarrow x^4 + x^3 - x + x^2 + x + x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^2 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$$

بنابراین ۲ جواب برای x وجود دارد.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم) (متوسط)

۴- گزینه «۱» - می دانیم بیشترین فاصله نقطه A تا دایره $C(O, R)$ برابر است با:

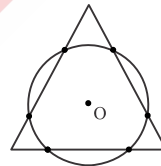
$$|OA| + R$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow O(-3, 1), R = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 - 24} = 2$$

$$|OA| + R = \sqrt{(1+3)^2 + (m-1)^2} + 2 = 6 \Rightarrow \sqrt{16 + (m-1)^2} = 4 \Rightarrow m = 1$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول) (آسان)

۵- گزینه «۳» - مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها تا نقطه O برابر با مقدار ثابتی باشد دایره‌ای به مرکز O است. حال اگر این دایره اضلاع مثلث را قطع کند ۶ نقطه تقاطع حاصل می شود.



(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول) (متوسط)

۶- گزینه «۴» - وتر i از بیضی که در کانون بر قطر کانونی عمود باشد کوتاه‌ترین وتر گذرنده از

$$\text{کانون است و اندازه آن } MN = \frac{2b^2}{a} \text{ است.}$$

$$AA' \text{ وسط } O = \frac{A+A'}{2} \Rightarrow O(\frac{1+1}{2}, \frac{1-1}{2}) \Rightarrow O(1, 0)$$

$$|AA'| = 2a \Rightarrow |1 - (-1)| = 2a \Rightarrow a = 1$$

$$|OF| = c \Rightarrow |1 - 3| = c \Rightarrow c = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 1 = b^2 + 4 \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

$$MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(\sqrt{3})^2}{1} = \frac{12}{1} = 12$$

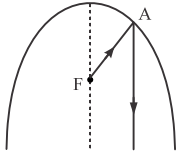
(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس سوم) (متوسط)

۷- گزینه «۴» - اگر پرتوی بازتابش موازی محور تقارن سهمی باشد پرتوی تابش از کانون سهمی گذشته است.

$$x^2 + 2x + 4y - 7 = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x + 1) = -4y + 7 \Rightarrow (x+1)^2 = -4(y-2)$$

سهمی روبه پایین باز می شود:

$$S(-1, 2), Fa = 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow F(-1, 2-1) \Rightarrow F(-1, 1)$$



برای تعیین محل برخورد پرتو با سطح داخلی سهمی محل برخورد خط $x = 3$ و سهمی را به دست می آوریم:

$$(x+1)^2 = -4(y-2) \xrightarrow{x=3} (3+1)^2 = -4(y-2) \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(3, -2)$$

$$AF \text{ معادله خط } y-1 = \frac{-2-1}{3+1}(x+1) \Rightarrow 3x+4y-1=0$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس سوم) (دشوار)

۸- گزینه «۲» -

توجه: ۱- در ناحیه پنجم مختصات علامت مؤلفه‌ها به صورت $(+, +, -)$ است.

۲- برداری که با جهت مثبت هر ۳ محور زوایای یکسان می سازد هر ۳ مؤلفه‌اش یکسان هستند و اگر این زوایا حاده باشد علامت این مؤلفه‌ها مثبت است.

۳- اندازه یا طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ مستقیماً از رابطه زیر به دست می آید:

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

۴- برای تعیین زوایای بردار $\vec{V}(a, b, c)$ با محوره‌های x و y و z که به ترتیب α, β, γ هستند، می توان گفت:

$$\cos \alpha = \frac{a}{|\vec{V}|}, \cos \beta = \frac{b}{|\vec{V}|}, \cos \gamma = \frac{c}{|\vec{V}|}$$

$$\vec{a}(m, 2, -2) \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 4 + 4}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 8}} \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$$

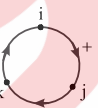
$$\xrightarrow{\text{ناحیه پنجم}} m = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(2\sqrt{2}, 2, -2), \vec{b}(1, 1, 1)$$

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{2} + 2 - 2}{\sqrt{1+1+1}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم) (دشوار)

۹- گزینه «۴» - برای محاسبه حاصل ضرب‌های بردارهای یک‌ه مختصات از فرم



استفاده می کنیم. مثلاً حاصل $\vec{i} \times \vec{k}$ که در خلاف جهت حرکت است

برابر $-\vec{j}$ خواهد بود. در صورتی که $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ چون مطابق با جهت حرکت است.

$$(\vec{i} \times \vec{k}) \times \vec{i} = (-\vec{j}) \times \vec{i} = -\vec{j} \times \vec{i} = -(-\vec{k}) = \vec{k} \Rightarrow \text{اندازه بردار} = 1$$

$$(\vec{r}\vec{i} - \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{r}\vec{i} \times \vec{k} - \vec{j} \times \vec{k} = \vec{r}(-\vec{j}) - \vec{i} = -\vec{i} - \vec{r}\vec{j} \Rightarrow \text{اندازه بردار} = \sqrt{1 + r^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{نسبت اندازه} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم) (آسان)

۱۰- گزینه «۲» -

$$\vec{m}, \vec{2}, \vec{1} \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow m \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6m - 8 + 2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 16 + 4} = \frac{1}{2} \sqrt{56} = \sqrt{14}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم) (متوسط)