

ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۲» -

$$d \mid 15n - 2 \Rightarrow d \mid 4(15n - 2) - 5(12n + 1) \Rightarrow d \mid -13 \Rightarrow d = 13 \quad \begin{matrix} d \neq 1 \\ d \mid 12n + 1 \end{matrix}$$

یعنی هر دو عدد بر ۱۳ بخش پذیرند.

$$12n + 1 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 12n \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow n \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow n = 13k + 1$$

بزرگترین مقدار ۲ رقمی n به ازای k=7 به دست می آید:

$$n = 13 \times 7 + 1 = 92 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 2 = 11$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم) (متوسط)

۲- گزینه «۳» -

$$5^n - 1 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 5^n \equiv 1 \pmod{11}$$

اولین مقدار n که به ازای آن رابطه $5^n \equiv 1 \pmod{11}$ برقرار می شود را به دست می آوریم.

$$5^2 \equiv 3 \pmod{11} \xrightarrow{\times 5} 5^3 \equiv 4 \pmod{11} \xrightarrow{\times 5} 5^4 \equiv 2 \pmod{11} \xrightarrow{\times 5} 5^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$5^5 \equiv 1 \pmod{11} \xrightarrow{\text{به توان } k} (5^5)^k \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 5^{5k} \equiv 1 \pmod{11}$$

بنابراین $n = 5k$ است و تعداد مقادیر دو رقمی n برابر است با:

$$\left[\frac{90}{5} \right] = 18$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم) (دشوار)

۳- گزینه «۲» -

$$23x + 17y = 1$$

$$17 \equiv 6x + 5y \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 6x \equiv 18 \pmod{17} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{17} \Rightarrow x = 17k + 3$$

$$23(17k + 3) + 17y = 1 \Rightarrow y = -23k - 4$$

کمترین مقدار طبیعی y به ازای k=-1 به دست می آید.

$$y_0 = -23(-1) - 4 = 19$$

$$y_0^{23} \equiv 19^{23} \equiv (1)^{23} \equiv 1 \pmod{17}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم) (متوسط)

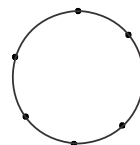
۴- گزینه «۲» - تعداد دورهای به طول ۴ در هر یک از ۶ ضلعی ها برابر ۹ است این دورها به شکل های زیر مشخص می شوند که به شکل ۶ دوزنقه و ۳ تا پروانه ظاهر می شوند.



بنابراین در مجموع این ۲ شش ضلعی ۱۸ دور به طول ۴ دارند که به همراه دوزنقه میانی ۱۹ دور به طول ۴ در کل گراف وجود دارد.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول) (متوسط)

۵- گزینه «۳» -



در گراف C_7 با انتخاب هر ۴ راس از بین ۷ راس یک مجموعه احاطه گر معرفی می شود به جز حالتی که ۴ راس به طور متوالی (پشت سر هم) قرار گرفته باشند تعداد انتخاب های ۴

راس از بین ۷ راس برابر با $\binom{7}{4}$ است و تعداد حالاتی که ۴ راس متوالی انتخاب می شود ۷

است. بنابراین:

$$= \binom{7}{4} - 7 = 35 - 7 = 28$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس سوم) (متوسط)

۶- گزینه «۲» - کمترین تعداد عضو مجموعه احاطه گر مینیمال همان عدد احاطه گری گراف است که برابر ۲ است. زیرا مجموعه احاطه گر مینیمم این گراف مجموعه $\{d, h\}$ است. بیشترین تعداد عضو مربوط به حالتی مانند $A = \{e, g, c, h\}$ است که ۴ عضو می باشد بنابراین اختلاف بیشترین و کمترین تعداد عضو برابر است با:

$$4 - 2 = 2$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم) (متوسط)

۷- گزینه «۴» - از آنجا که خودکارها مشابه هم و یکسان هستند باید تعداد جواب های صحیح

معادله $9 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ را به دست آوریم به طوری که دقیقاً ۲ تا از مجهولات صفر باشند و بقیه مجهولات مقادیر مثبت (طبیعی) داشته باشند. بنابراین ۲ تا از

مجهولات را انتخاب کرده و مساوی صفر قرار می دهیم (تعداد این انتخاب ها $\binom{5}{2}$ خواهد بود) و تعداد جواب های طبیعی معادله حاصل را به دست می آوریم. فرض کنیم $x_1 = 0$

و $x_2 = 0$ در این صورت معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_3 + x_4 + x_5 = 9 \Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2}$$

بنابراین تعداد کل جواب های حاصل برابر است با:

$$\binom{8}{2} \times \binom{5}{2} = 28 \times 10 = 280$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول) (دشوار)

۸- گزینه «۴» - تعداد مربع های لاتین متعامد با یک مربع لاتین 3×3 برابر با ۶ است. این مربع های لاتین از تعویض جای ۲ سطر یا تعویض جای ۲ ستون به دست می آیند.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول) (متوسط)

۹- گزینه «۳» - از کل اعداد ۶ رقمی ممکن تعداد حالاتی که در آن ها ارقام ۱ یا ۲ یا ۳ به کار نرفته را کم می کنیم:

$$|S| = 3^6 = 729$$

تعداد اعدادی که ۱ و ۲ در آن ها به کار نرفته $|A| = 2^6 = 64$ ؛ تعداد اعدادی که رقم ۱ در آن ها به کار نرفته $|B| = 2^6 = 64$ ؛ تعداد اعدادی که رقم ۲ در آن ها به کار نرفته $|C| = 2^6 = 64$ ؛ تعداد اعدادی که رقم ۳ در آن ها به کار نرفته $|A \cap B| = 2^4 = 16 \Rightarrow |A \cap C| = |B \cap C| = 16$

$$\begin{aligned} |A' \cap B' \cap C'| &= |(A \cup B \cup C)'| = |S| - |A \cup B \cup C| \\ &= |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|) \\ &= 729 - (64 + 64 + 64 - 16 - 16 - 16 + 8) = 540 \end{aligned}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» - تعداد باقی مانده های ممکن در تقسیم بر ۲۳ را برابر با تعداد جایگاه ها در نظر می گیریم (باقی مانده ها از صفر تا ۲۲ می توانند باشند که تعداد آن ها ۲۳ است).

اگر در هر جایگاه ۳ عدد قرار دهیم با انتخاب عدد دیگر مطمئن می شویم جایگاهی با ۴ عدد موجود است بنابراین جواب مساله $3 \times 23 + 1 = 70$ است.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم) (متوسط)