

ریاضی ۲

۱- گزینه «۱» - با فاکتور گرفتن از کوچک‌ترین عامل داریم:

$$\begin{aligned} 4^{x-2}(1+4^2+4^4) &= 1 \cdot 92 \Rightarrow 4^{x-2}(1+16+256) = 1 \cdot 92 \\ \Rightarrow 4^{x-2}(273) &= 1 \cdot 92 \Rightarrow 4^{x-2} = 4 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ \Rightarrow 4^{x+1} &= 4^4 = 16 \end{aligned}$$

(حتمی) (فصل پنجم - درس اول - تابع نمایی - تابع نمایی) (آسان)

۲- گزینه «۲» -

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 &= 0 \xrightarrow{\Delta > 0} x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1, x_1 + x_2 = 4 = s \\ \Rightarrow \sqrt{x_1^2 x_2 + x_2} &= \sqrt{(x_1 x_2) x_1 + x_2} = \sqrt{(1) x_1 + x_2} = \sqrt{s} = 2 \end{aligned}$$

(حتمی) (فصل اول - درس دوم - معادله درجه دوم - معادله درجه دوم) (متوسط)

۳- گزینه «۲» -

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x - 2 &= 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{3}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2}{3} \\ S &= (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 2(\alpha + \beta) - 2 = 2\left(\frac{-4}{3}\right) - 2 = \frac{-8}{3} - 2 = \frac{-14}{3} \\ P &= (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 = 4\left(\frac{-2}{3}\right) - 2\left(\frac{-4}{3}\right) + 1 \\ \Rightarrow P &= \frac{-8}{3} + \frac{8}{3} + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{14}{3}x + 1 = 0 \\ \xrightarrow{\times 3} & 3x^2 + 14x + 3 = 0 \end{aligned}$$

(حتمی) (فصل اول - درس دوم - معادله درجه دوم - معادله درجه دوم) (متوسط)

۴- گزینه «۳» -

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1} &= \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = t \\ \Rightarrow t + \frac{1}{t} &= \frac{5}{2} \xrightarrow{\times t} t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \\ \xrightarrow{\times 2} & 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ یا } \frac{1}{2} \\ \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x} = 2 \Rightarrow 2x = x+1 \Rightarrow x = 1 = m \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x+2 = x \Rightarrow x = -2 = n \end{cases} \\ \Rightarrow |m-n| &= 3 \end{aligned}$$

(حتمی) (فصل اول - درس سوم - معادله گویا - معادله گویا) (متوسط)

۵- گزینه «۴» - ابتدا مطابق عکس قضیه تالس داریم:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{DB} &= \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC \\ DE &= 11 - (2 + 5) = 4 \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{4}{BC} \Rightarrow BC = 12 \end{aligned}$$

و محیط چهار ضلعی DECB برابر ۳۰ خواهد بود.

(حتمی) (فصل دوم - درس دوم - قضیه تالس - هندسه) (متوسط)

۶- گزینه «۴» -

$$\begin{aligned} A'(4, a) \in f^{-1} \Rightarrow A(a, 4) \in f \Rightarrow -1 + \sqrt{2a-1} &= 4 \\ \Rightarrow \sqrt{2a-1} &= 5 \Rightarrow 2a-1=25 \Rightarrow 2a=26 \Rightarrow a=13 \end{aligned}$$

(حتمی) (فصل سوم - درس دوم - تابع وارون - تابع) (متوسط)

۷- گزینه «۱» - با ضرب کردن 21° در $\frac{\pi}{180^\circ}$ داریم:

$$21^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{21\pi}{18} = \frac{7\pi}{6}$$

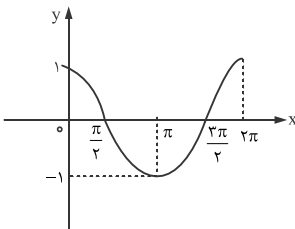
(حتمی) (فصل چهارم - درس اول - واحدهای اندازه‌گیری، رادیان - مثلثات) (آسان)

۸- گزینه «۲» - می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) &= \tan\left(\Delta\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1 \\ \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) &= -\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = +\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) &= (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

(حتمی) (فصل چهارم - درس دوم - روابط نسبتها و تبدیلات مثلثاتی - مثلثات) (متوسط)

۹- گزینه «۴» - با توجه به نمودار تابع $f(x) = \cos x$ داریم:



مطابق نمودار تابع در بازه $[\pi, 2\pi]$ براساس بررسی گزینه‌ها؛ هر خط افقی را حداکثر در یک نقطه قطع کرده و تابع یک به یک خواهد بود.

(حتمی) (فصل چهارم - درس سوم - نمودار توابع مثلثاتی - مثلثات) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» -

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{2x^2+1}{x+2} &= 1 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 2 \Rightarrow 2x^2+1 = 2x+4 \\ \Rightarrow 2x^2-2x-3 &= 0 \xrightarrow{b=a+c} x_1 = -1 \text{ یا } x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

و چون هر دو جواب معادله قابل قبول است به $\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2}$ می‌رسیم.

(حتمی) (فصل پنجم - درس دوم - معادله لگاریتمی - لگاریتم) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» - چون نمودار تابع نمایی یک واحد به سمت بالا انتقال یافته است

می‌بایستی $a-1=1$ و $a=2$ باشد.

$$f(x) = 1 + 2^{b-x}$$

$$A(0, 2) \in f \Rightarrow 1 + 2^{b-0} = 2 \Rightarrow 2^b = 1 \Rightarrow b = 0$$

(حتمی) (فصل پنجم - درس سوم - تابع نمایی (نمودار) - تابع نمایی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» -

$$\begin{aligned} \frac{\log E_1 = 11/\lambda + 1/\Delta M_1}{\log E_2 = 11/\lambda + 1/\Delta M_2} \xrightarrow{E_2 = 1000 E_1} \log 1000 E_1 &= 11/\lambda + 1/\Delta M_2 \\ \Rightarrow \log 1000 + \log E_1 &= 11/\lambda + 1/\Delta M_2 \\ \Rightarrow 3 + (11/\lambda + 1/\Delta M_1) &= 11/\lambda + 1/\Delta M_2 \\ \Rightarrow 3 &= 1/\Delta(M_2 - M_1) \Rightarrow M_2 - M_1 = 2 \end{aligned}$$

(حتمی) (فصل پنجم - درس سوم - کاربردهای لگاریتم - لگاریتم) (دشوار)

۱۳- گزینه «۲» - ابتدا مشکل جزء صحیح را رفع کرده که در همسایگی راست $x = 2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = [2^+] = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{2x + 1} = \frac{6}{5} \times \frac{2}{2} = 1 \frac{1}{5}$$

(حانمی) (فصل ششم - درس دوم - حد یکطرفه - حد تابع) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» - می‌توان به کمک رابطه $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

و مبهم $\frac{0}{0}$ را رفع ابهام نمود.

(حانمی) (فصل ششم - درس دوم - محاسبه حد تابع - حد) (دشوار)

۱۵- گزینه «۳» - می‌بایستی حد تابع یا مقدار تابع در نقطه $x = 1$ برابر گردد که داریم:

$$f(1) = 2x + a = 2 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 + a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

(حانمی) (فصل ششم - درس سوم - پیوستگی تابع - پیوستگی تابع) (متوسط)

۱۶- گزینه «۴» - می‌دانیم تابع $[x]$ در نقطه $x = 2$ دارای حد نبوده و پیوسته نمی‌باشد. ولی

با ضرب شدن در عامل صفر، دارای حد خواهد بود بنابراین داریم:

$$m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow \frac{m^2 + 1}{m} = -2$$

(حانمی) (فصل ششم - درس سوم - پیوستگی تابع - پیوستگی تابع) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» - مطابق رابطه انحراف معیار می‌توان نوشت:

$$1, 2, 3, 4, 5$$

$$\bar{X} = 3 \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{(3-1)^2 + (3-2)^2 + (3-3)^2 + (3-4)^2 + (3-5)^2}{5}}$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{4+1+0+1+4}{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

(حانمی) (فصل هفتم - درس دوم - انحراف معیار - آمار) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» - می‌دانیم گروهی که دارای ضریب تغییرات کم‌تر باشد، عملکرد و دقت کاری

بالتری خواهد داشت.

$$\bar{X}_1 = 60, \delta_1^2 = 36 \Rightarrow \delta_1 = 6 \Rightarrow C_{v1} = \frac{\delta_1}{\bar{X}_1} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

$$\bar{X}_2 = 70, \delta_2^2 = 25 \Rightarrow \delta_2 = 5 \Rightarrow C_{v2} = \frac{\delta_2}{\bar{X}_2} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$$

بنابراین گروه دوم ($\frac{1}{14} < \frac{1}{10}$) عملکرد بهتری دارد.

(حانمی) (فصل هفتم - درس دوم - آمار - آمار) (دشوار)

۱۹- گزینه «۴» - در احتمال شرطی با وقوع پیشامد B (مجموع ۶ برآمدها)، تعداد عضوهای

فضای نمونه‌ای کاهش یافته و در این فضای دوم، احتمال را می‌یابیم:

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{2}{5} = 0.4$$

(حانمی) (فصل هفتم - درس اول - احتمال شرطی - احتمال) (متوسط)

۲۰- گزینه «۱» - با توجه به دو پیشامد مستقل مسئله داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{6+3-2}{9} = \frac{7}{9}$$

از طرفی چون دو پیشامد مستقل اند می‌توانیم از رابطه زیر نیز سریع‌تر به جواب مسئله

برسیم:

$$P(A \cup B) = 1 - P(A') \cdot P(B') = 1 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

(حانمی) (فصل هفتم - درس اول - احتمال مستقل - احتمال) (متوسط)