

حسابان

۱- گزینه «۲» -

۶۴، ۳۲، ۱۶، ... دنباله هندسی

$$q = \frac{1}{2}, n = 8; S_1 = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_1 = \frac{64(1-(\frac{1}{2})^8)}{1-\frac{1}{2}} = 128(\frac{255}{256}) = \frac{255}{2}$$

دنباله حسابی : -۲۲، -۱۶، -۱۰، ...

$$d = 6, n = 10$$

$$S_r = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_r = \frac{10}{2}(-44 + 9(6)) = 50$$

$$\frac{S_1}{S_r} = \frac{\frac{255}{2}}{50} = \frac{255}{100} = 2/5$$

(میزبایی) (دنباله حسابی و هندسی - مجموع جملات) (متوسط)

۲- گزینه «۱» -

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}$$

$$n = 1, n = 2, n = 3$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

آخرین عدد دسته nام برابر است با:

$$\frac{7(7+1)}{2} = 28 \Rightarrow \text{آخرین عدد دسته هفتم} = 29 = \text{اولین عدد دسته هشتم}$$

$$\frac{9(9+1)}{2} = 45 \Rightarrow \text{آخرین عدد دسته نهم}$$

$$\left\{ \overbrace{29, 30, \dots}^{\text{۸ تا عدد}}, \overbrace{\dots, 45}^{\text{۹ تا عدد}} \right\}$$

$$n = 8 \text{ دسته هشتم} \quad n = 9 \text{ دسته نهم}$$

$$629 = 29 + 30 + \dots + 45 = \frac{17}{2}(2(29) + 16(1))$$

(میزبایی) (دنباله حسابی - مجموع جملات) (دشوار)

۳- گزینه «۴» -

$$-5x^2 + x + 2 = 0 \text{ ریشه‌ها عکس شوند.}$$

$$5x^2 - x - 2 = 0$$

$$5(x-1)^2 - (x-1) - 2 = 0 \text{ ریشه‌ها یک واحد اضافه شوند.}$$

$$5x^2 - 10x + 5 - x + 1 - 2 = 0$$

$$5x^2 - 11x + 4 = 0$$

(میزبایی) (معادله درجه دوم - طریقه نوشتن معادله درجه دوم) (متوسط)

۴- گزینه «۱» -

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$f(x) = a(x+1)(x-2)$$

$$\left| \begin{matrix} 0 \\ \in f : 1 = a(1)(-2) \end{matrix} \right| \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

$$a + b + c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 1$$

(میزبایی) (نمودار درجه دوم - نمودار درجه دوم) (آسان)

۵- گزینه «۲» -

$$AC = \text{فاصله رأس } A \text{ از خط } = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$AC = \frac{|2(4) - 4(-2) - 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$a = \frac{\text{قطر}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$S = a^2 = 8$$

(میزبایی) (هندسه تحلیلی - فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۶- گزینه «۴» -

$$\left. \begin{matrix} 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = \{2\}$$

$$D_g = \{a\}$$

$$D_f = D_g \Rightarrow a = 2$$

$$\left. \begin{matrix} x = 2 : f(2) = c \\ x = 2 : g(2) = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow c = 3$$

$$a + c = 5$$

(میزبایی) (تابع - دو تابع مساوی) (متوسط)

۷- گزینه «۱» - می‌دانیم:

$$x \notin \mathbb{Z} : [x] + [-x] = -1$$

$$x \notin \mathbb{Z} : 0 < x - [x] < 1$$

$$x \notin \mathbb{Z} : \text{fog}(x) = f(g(x)) = f(-1) = -1 - [-1] = -1 + 1 = 0$$

$$x \notin \mathbb{Z} : \text{gof}(x) = g(f(x)) = g(x - [x]) \stackrel{0 < x - [x] < 1}{=} g(\text{عدد بین صفر و یک}) = -1$$

$$x \notin \mathbb{Z} : \text{fog}(x) - \text{gof}(x) = 0 - (-1) = 1$$

(میزبایی) (تابع - تابع مرکب و جزء صحیح) (متوسط)

۸- گزینه «۳» -

$$y = \frac{2x-3}{x+1} \Rightarrow xy + y = 2x - 3$$

$$2x - xy = y + 3 \Rightarrow x(2-y) = y + 3$$

$$x = \frac{y+3}{2-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2-x}$$

(میزبایی) (تابع - ضابطه تابع وارون) (متوسط)

۹- گزینه «۳» -

$$2x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \Rightarrow D_f = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_g = (-\infty, 4]$$

$$D_{g \circ f}(x) = \begin{cases} x \in D_f \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \text{ (I)} \\ f(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{2x-5} \in (-\infty, 4] \end{cases}$$

$$\sqrt{2x-5} \leq 4 \Rightarrow 2x-5 \leq 16 \Rightarrow 2x \leq 21 \Rightarrow x \leq \frac{21}{2} \text{ (II)}$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} D_{g \circ f} = \left[\frac{5}{2}, \frac{21}{2}\right]$$

$$b - a = \frac{21}{2} - \frac{5}{2} = 8$$

(میرزایی) (تابع - دامنه تابع مرکب) (متوسط)

۱۰- گزینه «۴» -

$$A \left| \frac{1}{2} \in f : 1 = (2) \frac{\frac{a+b}{2}}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow a + b = 0 \right.$$

$$B \left| \frac{\Delta}{\Delta} \in f : \Delta = 2 \frac{\frac{\Delta a + b}{2}}{2} \Rightarrow 2^2 = 2 \frac{\frac{\Delta a + b}{2}}{2} \Rightarrow \frac{\Delta a + b}{3} = 3 \Rightarrow \Delta a + b = 9 \right.$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \Delta a + b = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -1$$

$$f(x) = 2^{\frac{2x-1}{2}}$$

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

(میرزایی) (تابع نمایی - نمودار تابع نمایی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» -

$$\log_2(2x^2 + 1) = \log_2 2(x + 2)$$

$$2x^2 + 1 = 2x + 6 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق } 1 \\ x = \frac{5}{2} \text{ ق } 2 \end{cases}$$

$$x = -1 : \log_{\sqrt{2}}(2x + 4) = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2 \log_{\sqrt{2}} 2$$

$$x = \frac{5}{2} : \log_{\sqrt{2}}(2x + 4) = \log_{\sqrt{2}}\left(2\left(\frac{5}{2}\right) + 4\right) = \log_{\sqrt{2}} 9 = \log_{\sqrt{2}} 3^2 = 4$$

(میرزایی) (لگاریتم - معادله لگاریتمی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» -

$$\log_{\Delta} 2 = a \Rightarrow \log_{\Delta} \Delta = \frac{1}{a}$$

$$\log_{12} \Delta = \log_{\Delta} 2 = 3 \log_{\Delta} \Delta = 3 \left(\frac{\log_{\Delta} \Delta}{\log_{\Delta} 10} \right) = 3 \left(\frac{-\log_{\Delta} \Delta}{1 + \log_{\Delta} \Delta} \right) = 3 \left(\frac{-\frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}} \right) = \frac{3}{a+1}$$

(میرزایی) (لگاریتم - ویژگی‌های لگاریتم) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» -

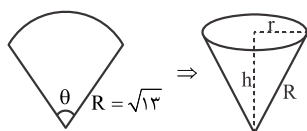
$$\cos(25^\circ + \alpha) = \sin 40^\circ \Rightarrow (25^\circ + \alpha) + 40^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 25^\circ$$

$$\tan(\beta + 20^\circ) = \cot 25^\circ \Rightarrow (\beta + 20^\circ) + 25^\circ = 90^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

$$\cos(\alpha + \beta + 110^\circ) = \cos(25^\circ + 45^\circ + 110^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

(میرزایی) (مثلثات - زوایای متمم) (آسان)

۱۴- گزینه «۳» -



$$S = \frac{\theta}{2} R^2 \Rightarrow 2\pi \sqrt{12} = \frac{\theta}{2} \times 12 \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{\sqrt{12}} \text{ رادیان}$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{R} \Rightarrow \frac{4\pi}{\sqrt{12}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{12}} \Rightarrow r = 2$$

$$R^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 12 = h^2 + 4 \Rightarrow h^2 = 8 \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$$

(میرزایی) (مثلثات - مساحت قطاع) (متوسط)

۱۵- گزینه «۱» -

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta$$

$$\sin(3\pi + \theta) = \sin(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\text{عبارت} = \frac{-\cos \theta - \sin \theta}{-\sin \theta + \cos \theta} \xrightarrow{\text{صورت و مخارج را بر } \cos \theta \text{ تقسیم نمایی.}} = \frac{-1 - \tan \theta}{-\tan \theta + 1} = \frac{-1/4}{-1/6} = \frac{4}{3}$$

(میرزایی) (مثلثات - نسبت‌های مثلثاتی) (متوسط)

۱۶- گزینه «۴» -

$$\text{عبارت} = (\tan x + \cot x)(\tan x - \cot x) \cdot \sin 2x$$

$$= \left(\frac{2}{\sin 2x}\right)(-2 \cot 2x) \cdot \sin 2x = -4 \cot 2x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{12}} = -4 \cot \frac{\pi}{6} = -4\sqrt{3}$$

(میرزایی) (مثلثات - اتحادهای مثلثاتی) (دشوار)

۱۷- گزینه «۴» - $f(x)$ در $x = 1$ حد ندارد، پس $a = 1$ می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -2a} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -2} [f(x)] = [2^-] = 1$$

$$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)] = [\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)] = [2] = 2$$

$$\text{عبارت} = 1 + 2 = 3$$

(میرزایی) (حد - حد در نمودار) (آسان)

۱۸- گزینه «۲» -

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\pi \cot x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos x}{\sin x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x (\cos x + \sin x)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1$$

(میرزایی) (حد - رفع ابهام) (متوسط)

۱۹- گزینه «۱» -

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4-3x} - \sqrt{3-2x}}{x^2 - 1} \times \frac{\sqrt{4-3x} + \sqrt{3-2x}}{\sqrt{4-3x} + \sqrt{3-2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \left((4-3x) - (3-2x) \right)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{4-3x} + \sqrt{3-2x})} = \frac{-1}{2(2)} = \frac{-1}{4}$$

(میرزایی) (حد - ربع ابهام) (متوسط)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x + \cos x + 2}{\sin x + 2} = \frac{1+1+2}{0+2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (b[x] + 1) = b[0^-] + 1 = -b + 1$$

$$f(0) = a$$

$$a = 2$$

$$-b + 1 = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$a \cdot b = 2(-1) = -2$$

(میرزایی) (حد - پیوستگی در نقطه) (متوسط)

سوالات