

حسابان ۱

۱- گزینه «۱» - داریم:

$$2x^2 - ax + 6 = 0$$

$$\alpha\beta^2 = -9 \Rightarrow \alpha\beta \cdot \beta = -9 \Rightarrow \left(\frac{C}{a}\right)(\beta) = -9 \Rightarrow 2\beta = -9 \Rightarrow \beta = -\frac{9}{2}$$

و می‌دانیم ریشه معادله در آن صدق می‌کند:

$$\beta = -\frac{9}{2} \Rightarrow 18 + 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -24 \Rightarrow a = -12 \Rightarrow \left[\frac{a+1}{2}\right] = \left[\frac{-11}{2}\right] = -\frac{11}{2}$$

(حتمی) (فصل اول - درس دوم - معادله درجه دوم) (متوسط)

۲- گزینه «۲» -

$$\sqrt{2x-1} = x-2 \geq 0 \Rightarrow 2x-1 = x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-6x+5 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } 5$$

که فقط $x = 5$ در معادله صدق کرده و تنها جواب معادله خواهد بود و داریم:

$$\alpha = 5 \Rightarrow \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha-2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

(حتمی) (فصل اول - درس سوم - معادله گنگ) (متوسط)

$$\text{گزینه «۳» - با تغییر متغیر مناسب } t = \frac{1}{2x-3} \text{ داریم:}$$

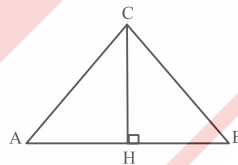
$$\frac{1}{(2x-3)^2} + \frac{2}{2x-3} = 3 \Rightarrow t^2 + 2t = 3 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = -3$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \frac{1}{2x-3} = 1 \Rightarrow 2x-3 = 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ t = -3 \Rightarrow \frac{1}{2x-3} = -3 \Rightarrow -6x+9 = 1 \Rightarrow -6x = -8 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

و معادله دارای دو ریشه حقیقی است.

(حتمی) (فصل اول - درس سوم - معادله گویا) (متوسط)

۴- گزینه «۴» - ابتدا شیب ضلع AB را به دست می‌آوریم:



$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{2-3} = -3$$

$$m_{CH} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{1}{3}, C(0, 2)$$

$$CH: y-2 = \frac{1}{3}(x-0) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow (0, 2)$$

(حتمی) (فصل اول - درس پنجم - هندسه تحلیلی) (متوسط)

۵- گزینه «۳» -

$$x \neq a \Rightarrow g(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{x-a} \xrightarrow{f(x)=g(x)} \frac{(x+3)(x-2)}{x-a} = x+3$$

یعنی $a = 2$ خواهد بود.

(حتمی) (فصل دوم - درس چهارم - دو تابع مساوی) (آسان)

$$\text{گزینه «۴» - می‌دانیم } g(x) = \begin{cases} 0, & x \in Z \\ -1, & x \notin Z \end{cases} \text{ بنا براین در } [x] + [-x] \text{ که یک تابع}$$

کسری می‌باشد فقط می‌بایستی $-1 = [x] + [-x]$ را در نظر بگیریم و خواهیم داشت:

$$x^2 + x = \frac{1}{-1} \Rightarrow x^2 + x = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

(حتمی) (فصل دوم - درس دوم - تابع جزء صحیح) (متوسط)

۷- گزینه «۲» - چون تابع f اکیداً صعودی می‌باشد محل تلاقی f با f^{-1} واقع بر خط $y = x$

خواهد بود که داریم:

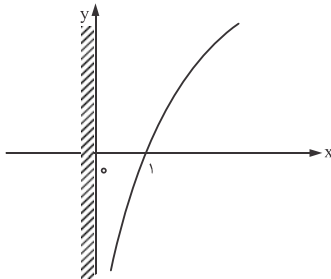
$$x^2 + x - 27 = x \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, 3), O(0, 0) \Rightarrow$$

$$OA = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

(حتمی) (فصل دوم - درس سوم - تابع وارون) (متوسط)

۸- گزینه «۲» - با توجه به این که نمودار تابع یک به یک هر خط افقی را حداکثر در یک نقطه

قطع می‌کند و با توجه به نمودار تابع $g(x) = \log x$ گزینه «۲» صحیح می‌باشد.



(حتمی) (فصل دوم - درس سوم - تابع یک به یک) (متوسط)

۹- گزینه «۴» - با توجه به تعریف تابع وارون می‌بایستی داشته باشیم:

$$g^{-1}(1) = k \Rightarrow g(k) = 1 \Rightarrow \frac{rk}{1+k} = 1 \Rightarrow rk = 1+k \Rightarrow k = 1$$

(حتمی) (فصل دوم - درس سوم - تابع وارون) (آسان)

۱۰- گزینه «۳» -

$$f(31) = 3 \Rightarrow a + \log_7 32 = 3 \Rightarrow a + \log_7 2^5 = 3 \Rightarrow a + 5 = 3 \Rightarrow a = -2$$

$$(\log_7 32 = \log_7 2^5 = 5 \log_7 2 = 5)$$

(حتمی) (فصل سوم - درس دوم - تابع لگاریتمی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» -

$$\sin 195^\circ = \sin(180^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{-\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} = -\tan 15^\circ - 1 = -k - 1$$

(حتمی) (فصل چهارم - درس دوم - نسبت‌های مثلثاتی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» - با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sin \alpha + \cos \alpha \\ \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \sin \alpha - \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)}{\sqrt{2} \sin(\alpha - 45^\circ)} \xrightarrow{\alpha = 75^\circ} A = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

(حتمی) (فصل چهارم - روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا) (دشوار)

۱۳- گزینه «۱» -

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x}{[x] + 1} = \frac{4+2}{[2^-] + 1} = \frac{6}{2} = 3$$

(حتمی) (فصل پنجم - حدهای یک طرفه) (متوسط)

۱۴- گزینه «۲» - با تعیین مقادیر حد راست و حد چپ داریم:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{2x^2 + x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{2x^2 + x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(2x+5)} = \frac{1}{9}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{2x^2 + x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(2x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2x+5} = \frac{-1}{9}$$

$$\Rightarrow |L_1 - L_2| = \left| \frac{1}{9} - \left(\frac{-1}{9}\right) \right| = \frac{2}{9}$$

(حتمی) (فصل پنجم - حدهای یک طرفه) (متوسط)

۱۵- گزینه «۳» - می‌بایستی $L_1 = L_2 = f(2)$ را بررسی کنیم:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{2a+2}{4-[2]^+} = \frac{2a+2}{2} = a+1 \\ L_2 = \frac{2a+2}{4-[2]^-} = \frac{2a+2}{2} \Rightarrow \frac{2a+2}{2} = a+1 \Rightarrow 2a+2 = 2a+2 \Rightarrow a = -1 \\ f(2) = \frac{2a+2}{2} = a+1 \end{cases}$$

(حتمی) (فصل پنجم - درس پنجم - پیوستگی تابع) (متوسط)

۱۶- گزینه «۴» - با به توان ۲ رسانیدن شرط مسئله می‌توان نوشت:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{9} - 1 = \frac{-8}{9}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{2}{\frac{-8}{9}} = \frac{-18}{8} = \frac{-9}{4}$$

(حتمی) (فصل چهارم - درس چهارم - روابط مثلثاتی) (متوسط)

۱۷- گزینه «۱» - حاصل $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$ می‌باشد به عبارت دیگر با در نظر گرفتن حد

راست در $x = 1$ مثلاً مقدار $x = 1/1$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]-1}{x-1} = \frac{[1/1]-1}{1/1-1} = \frac{0}{0} = 0$$

(حتمی) (فصل پنجم - درس دوم - حدهای یک طرفه) (دشوار)

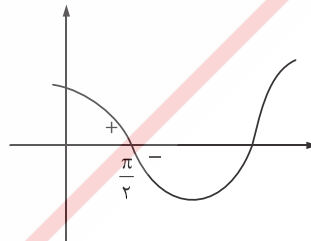
۱۸- گزینه «۳» - ابتدا حدود داخل برآکت را می‌سازیم:

$$0 < x < 2 \Rightarrow 0 < 3x < 6 \Rightarrow 3x = 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$$

در پنج نقطه تابع فاقد حد خواهد بود.

(حتمی) (فصل پنجم - درس دوم - حد تابع) (دشوار)

۱۹- گزینه «۱» - با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ عمل می‌کنیم:



$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\cos x] = [0^-] = -1$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [\cos x] = [0^+] = 0$$

تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ فاقد حد خواهد بود.

(حتمی) (فصل پنجم - درس دوم - حدهای مثلثاتی) (دشوار)

۲۰- گزینه «۲» - ابتدا داریم:

$$\begin{cases} t_5 + t_6 = t_1 r^4 + t_1 r^5 = 21 \\ t_5 + t_8 = t_1 r^6 + t_1 r^7 = 147 \end{cases}$$

با تقسیم این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{t_1 r^6 (1+r)}{t_1 r^6 (1+r^3)} = \frac{21}{147} \Rightarrow \frac{(1+r)}{(1+r)(1+r^2-r)} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{r^2-r+1} = \frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$r^2 - r + 1 = 7 \Rightarrow r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow (r-3)(r+2) = 0 \Rightarrow r = -2 \text{ یا } r = 3$$

که فقط $r = 3$ قابل قبول خواهد بود زیرا جملات را مثبت فرض کرده است.

(حتمی) (فصل اول - درس اول - دنباله هندسی) (متوسط)