

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۲» - به صورت‌های زیر می‌توان از ایستگاه B به ایستگاه E بدون عبور از ایستگاه A حرکت کرد که با استفاده از اصل جمع و اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۱) BDE \rightarrow ۲ \times ۲ = ۴ \\ ۲) BCE \rightarrow ۳ \times ۲ = ۶ \\ ۳) BDCE \rightarrow ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸ \\ ۴) BCDE \rightarrow ۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌ها} = ۴ + ۶ + ۸ + ۱۲ = ۳۰$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - شمارش - اصل جمع و ضرب) (متوسط)

۲- گزینه «۳» -

$$n(S) = \binom{۷}{۴} = \frac{۷!}{۴! \times ۳!} = ۳۵$$

$$n(A) = \binom{۳}{۱} \binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۲} \binom{۴}{۲} + \binom{۳}{۳} \binom{۴}{۱} = ۱۲ + ۱۸ + ۴ = ۳۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۴}{۳۵}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۲ - احتمال) (متوسط)

۳- گزینه «۱» - با توجه به مطالب صفحه ۳۱ کتاب درسی گام‌های چرخه آمار در حل مسائل، اندازه‌گیری یا سنجش به گام دوم (طرح و برنامه‌ریزی)، تصحیح اشتباه‌های احتمالی به گام سوم (گردآوری داده‌ها) و استفاده از شاخص‌های مرکزی و پراکندگی به گام چهارم (تحلیل داده‌ها) مربوط می‌شود. (اکبری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۳ - چرخه آمار در حل مسائل) (آسان)

۴- گزینه «۳» -

$$\begin{aligned} ۱۵۰,۰۰۰ &\xrightarrow{+۵۰,۰۰۰} ۲۰۰,۰۰۰ & ۲۵۰,۰۰۰ & ۳۰۰,۰۰۰ & , \dots \\ \Rightarrow a_1 = ۱۵۰,۰۰۰ & & d = ۵۰,۰۰۰ & a_n = ۳,۰۰۰,۰۰۰ \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow ۳,۰۰۰,۰۰۰ = ۱۵۰,۰۰۰ + (n-1)۵۰,۰۰۰ \\ \Rightarrow ۳,۰۰۰,۰۰۰ = ۱۰۰,۰۰۰ + ۵۰,۰۰۰n & \Rightarrow n = ۵۸ \end{aligned}$$

چون پاداش از روز دوم شروع شده، بنابراین تعداد پاداش‌ها برابر ۵۷ می‌باشد.

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - دنباله‌های حسابی) (دشوار)

۵- گزینه «۲» -

جمله عمومی دنباله هندسی: $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$a_{۱۲} \times a_۲ = ۹ \Rightarrow a_1 r^{11} \times a_1 r^1 = ۹ \Rightarrow a_1^2 r^{12} = ۹ \Rightarrow (a_1 r^6)^2 = ۳^2 \xrightarrow{\text{جملات دنباله مثبت اند.}} a_1 r^6 = ۳ \Rightarrow a_{۱۶} = ۳$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - دنباله هندسی) (متوسط)

۶- گزینه «۴» -

$$A = \left(-\frac{۸۱}{۲۵۶}\right)^{-\frac{۰.۷۵}{۴}} \times (-0.۷۵)^{-\frac{۰.۷۵}{۲۵}} \times \left(-\frac{۱۶}{۹}\right)^{-۳} = \left(-\frac{۳۴}{۴۴}\right)^{-\frac{۳}{۱۶}} \times \left(-\frac{۳}{۴}\right)^{-\frac{۱}{۴}} \times \left(-\frac{۴۲}{۳۲}\right)^{-۳} = \left(-\frac{۳}{۴}\right)^{-\frac{۳}{۴}} \times \left(-\frac{۳}{۴}\right)^{-\frac{۱}{۴}} \times \left(-\frac{۳}{۴}\right)^{-۶} = \left(-\frac{۳}{۴}\right)^{-۵}$$

$$A = \left(-\frac{۳}{۴}\right)^{-۵}$$

$$A \text{ ریشه } ۵ \text{ام} = \sqrt[۵]{A} = \sqrt[۵]{\left(-\frac{۳}{۴}\right)^{-۵}} = -\frac{۳}{۴}$$

از روابط زیر استفاده کرده‌ایم:

$$(*) \begin{cases} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \end{cases}$$

$$(*) a < 0 \rightarrow \text{ریشه } n \text{ام } a = \sqrt[n]{a}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۲ - ریشه nام و توان گویا) (متوسط)

۷- گزینه «۳» - نمودار داده شده کاهشی است؛ یعنی با افزایش مقادیر x، مقادیر y کاهش می‌یابند، بنابراین در ضابطه تابع نمایی $y = a^x$ ، a باید عددی بین صفر و یک باشد که تنها گزینه «۳» این شرط را داراست. (اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۳ - تابع نمایی) (متوسط)

۸- گزینه «۲» - گزاره $(p \vee \sim p)$ گزاره‌ای همیشه درست و $p \wedge \sim p$ گزاره‌ای همیشه نادرست است، بنابراین داریم:

$$\underbrace{[(p \vee \sim p)] \vee r}_{\text{T}} \Leftrightarrow \underbrace{[(q \wedge \sim q) \Rightarrow s]}_{\text{F}} \equiv \text{T} \Leftrightarrow \text{T} \equiv \text{T}$$

* از جداول زیر استفاده کرده‌ایم:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	F

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس ۱ - ترکیب گزاره‌ها) (متوسط)

۹- گزینه «۲» - چون f یک تابع همانی است:

$$f(x) = x \Rightarrow -3m + 1 = m + 5 \Rightarrow -4m = 4 \Rightarrow m = -1$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۱ - تابع همانی) (آسان)

۱۰- گزینه «۱» - به تابعی چندضابطه‌ای که همه ضابطه‌هایش عدد ثابت باشند، تابع پلکانی می‌گویند، بنابراین در تابع f ضریب x باید برابر صفر شود:

$$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -3 & x \geq -2 \\ -4 & x < -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$-2 < -5$ ، بنابراین برای به دست آوردن $f(-5)$ از ضابطه پایین استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(-5) = -4$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۲ - تابع پلکانی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» -

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$D_f = \{-1, 5, -2\}$$

$$D_g = \{5, -1, -3\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{-1, 5\} - \{5\} = \{-1\} \Rightarrow \frac{f}{g}(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow \frac{f}{g} = \{(-1, -2)\}$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» -

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{تعداد بیکاران}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100$$

$$\text{تعداد شاغلین} + \text{تعداد بیکاران} = \text{جمعیت فعال}$$

$$\text{میلیون نفر} = 3 + 2 = 5$$

$$\text{میلیون نفر} = 5 + 35 = 40$$

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{5}{40} \times 100 = 12.5\%$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل سوم - درس ۱ - شاخص‌های آماری - نرخ بیکاری) (دشوار)

۱۳- گزینه «۳» - سال ششم خارج از جدول است، لذا باید از روش برون‌یابی استفاده کنیم. در واقع برون‌یابی تخمین داده‌های بعد یا قبل از داده‌های ثبت شده است.

$$\text{میانگین سال ها} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$\Rightarrow A(3, 12)$$

$$\text{میانگین فروش ها} = \frac{3+7+11+13+26}{5} = 12$$

$$B(5, 26)$$

نزدیک‌ترین سال به سال ششم، سال پنجم است:

$$\Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{26 - 12}{5 - 3} = 7$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 12 = 7(x - 3) \Rightarrow y = 7x - 9 \xrightarrow{x=6} y = 33$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل سوم - درس ۲ - سری‌های زمانی) (دشوار)

۱۴- گزینه «۳» - با استفاده از روش کلی حل معادله درجه دوم (روش Δ) داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(-5)(1) = 9 + 20 = 29 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{29} = 5.385$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3 + 5.385}{-10} = -\frac{8.385}{10} = -0.8385 \\ x_2 = \frac{3 - 5.385}{-10} = 1 \end{cases}$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل اول - درس ۲ - حل معادله درجه دوم و کاربردها) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» -

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x-3-2(x-2)-1(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = 0 \Rightarrow \frac{x-3-2x+4-x^2+5x-6}{(x-2)(x-3)} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 16 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4 < 0$$

چون $\Delta < 0$ معادله جواب ندارد. (اکبری) (پایه دهم - فصل اول - درس ۳ - معادله‌های شامل عبارت‌های گویا) (متوسط)

۱۶- گزینه «۱» - اگر رابطه f از مجموعه A به مجموعه B را با نمودار پیکانی نمایش دهیم در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو مجموعه اول (A) دقیقاً یک پیکان خارج شود. چون از عضو ۲- دو پیکان خارج شده است باید عضوهای متناظر با آن در مجموعه دوم با یکدیگر برابر باشند.

$$-2a - 3 = 5 \Rightarrow -2a = 8 \Rightarrow a = -4$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل دوم - درس ۱ - مفهوم تابع) (آسان)

۱۷- گزینه «۲» - چون رأس سهمی بر محور xها قرار دارد، بنابراین عرض رأس سهمی برابر صفر است؛ یعنی اگر $x = -\frac{b}{2a}$ که طول رأس سهمی است در معادله قرار دهیم باید برابر صفر شود.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2(3k+4)} = \frac{1}{3k+4}$$

$$x = \frac{1}{3k+4} \text{ را در معادله قرار می‌دهیم:}$$

$$(3k+4)\left(\frac{1}{3k+4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3k+4}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3k+4} - \frac{2}{3k+4} = -1 \Rightarrow \frac{-1}{3k+4} = -1$$

$$\Rightarrow 3k+4=1 \Rightarrow 3k=-3 \Rightarrow k=-1$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل دوم - درس ۴ - نمودار تابع درجه دوم) (متوسط)

۱۸- گزینه «۱» - میزان آلودگی صوتی دارای شاخصی است که از جنس عدد و رقم می‌باشد، بنابراین یک متغیر کمی می‌باشد که مقیاس اندازه‌گیری آن نسبتی است. چون مقیاس نسبتی برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و اختلاف بین مقادیر داده‌ها و نسبت مقادیر داده‌ها نیز با معناست. (اکبری) (پایه دهم - فصل سوم - درس ۱ - گردآوری داده‌ها) (آسان)

۱۹- گزینه «۴» - داده‌ها مرتب می‌باشند، بنابراین چارک‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{ccccccc} 3, & \boxed{7, 9}, & 11, & \boxed{12}, & 15, & \boxed{18, 22}, & 24 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & Q_1 = 8 & & \text{میانسه} & & Q_3 = 20 & \end{array}$$

بنابراین داده‌ها بین Q_1 و Q_3 به صورت زیر هستند:

$$9, 11, 12, 15, 18 \Rightarrow \bar{x} = \frac{9+11+12+15+18}{5} = 13$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(9-13)^2 + (11-13)^2 + (12-13)^2 + (15-13)^2 + (18-13)^2}{5}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{10}$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل سوم - درس ۳ - معیارهای پراکندگی) (دشوار)

۲۰- گزینه «۳» -

$$\bar{x} = \frac{(5 \times 1) + (7 \times 2) + (9 \times 3) + (10 \times 2) + (12 \times 2)}{5} \Rightarrow \bar{x} = 18$$

نوشتن داده‌ها برای یافتن میانسه:

$$5, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 12, 12$$

$$\text{میانسه } Q_2 = \frac{9+9}{2} = 9 \Rightarrow \bar{x} - Q_2 = 18 - 9 = 9$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل چهارم - درس ۱ - نمودارهای یک متغیره) (متوسط)