

ریاضیات

۱ - گزینه «۲» - با توجه به توضیحات مسئله، بایستی اشتراک دو بازه، یک عدد حقیقی باشد. پس:

$$4 - k = k + 1 \Rightarrow 2k = 3 \Rightarrow k = 1/2 \Rightarrow (k, k^2) = (1/2, 1/4) \Rightarrow \text{طول بازه} = 1/2 - 1/4 = 1/4$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل اول - درس اول - مجموعه‌های متناهی)

۲ - گزینه «۱» - با فرض $x^2 = A$ داریم:

$$A^2 + A + 2m = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = A_1 \\ A = A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = A_1 \\ x_2^2 = A_2 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = A_1 + A_2 = -\frac{b}{a} = -1 = \frac{1}{m+1} \Rightarrow m = -2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس دوم - مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله درجه ۲)

۳ - گزینه «۲» - اگر طرفین رابطه داده شده را بر x^2 تقسیم کنیم:

$$x^2 + 1 = \frac{9}{x^2} \Rightarrow \frac{9}{x^2} - x^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{x^2} - 18 + x^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{x^2} + x^2 = 19 \Rightarrow \frac{9 + x^4}{x^2} = 19 \Rightarrow \frac{x^4}{9 + x^4} = \frac{1}{19}$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل سوم - اتحادها)

۴ - گزینه «۴» - دو تا O یکسان دارد. که ابتدا و انتهای کلمه است:

0 — — — 0

تعداد حالت $6! = 720$ طریق می‌باشد. (نصیری) (پایه دهم - فصل ششم - درس دوم - جایگشت)

۵ - گزینه «۴» -

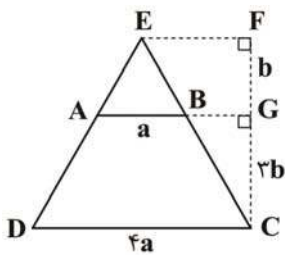
$$\sqrt{\sqrt{a+1} + a - 1} = \sqrt{2a - 2} \Rightarrow \sqrt{a+1} + a - 1 = 2a - 2 \Rightarrow \sqrt{a+1} = a - 1 \Rightarrow a + 1 = a^2 - 2a + 1 \Rightarrow a^2 - 3a = 0$$

$$\Rightarrow a(a - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ غیرقابل قبول} \\ a = 3 \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

$$a = 3 \Rightarrow \left| \left[\frac{a}{3} \right] + \left[-\frac{2}{a} \right] \right| = \left| \left[1 \right] + \left[-\frac{1}{3} \right] \right| = 0$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس سوم - معادلات رادیکالی)

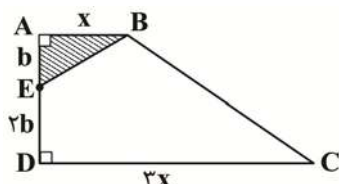
۶ - گزینه «۱» -



$$\frac{S(ABCD)}{S(ABE)} = \frac{\frac{1}{2}(a + 4a) \times 2b}{\frac{1}{2}a \times b} = 15$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس دوم - قضیه تالس)

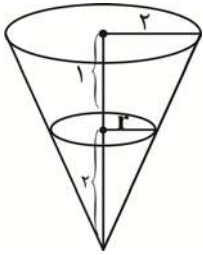
۷ - گزینه «۲» -



$$\left. \begin{aligned} S_1 &= S(ABE) = \frac{1}{2}bx \\ S &= S(ABCD) = \frac{1}{2}(x + 3x) \times 2b = 4bx \\ S_2 &= S(EBCD) = S - S_1 = \frac{7}{2}bx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{7}{2}bx}{\frac{1}{2}bx} = 7$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس دوم - نسبت و تناسب)

۸ - گزینه «۴» - اگر مثلث را حول d دوران دهیم، مخروطی ایجاد می‌شود، برش مورد نظر دایره‌ای به شعاع r می‌دهد که r را می‌توان با قضیه تالس محاسبه کرد.



$$\frac{r}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \pi$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس سوم - معادلات رادیکالی)

۹ - گزینه «۳» -

$$A = f(1) + f(2) + \dots + f(9) = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \dots + \cos \frac{8\pi}{9} + \cos \frac{9\pi}{9}$$

$$\frac{\pi}{9} + \frac{8\pi}{9} = \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = 0$$

$$\frac{2\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} = \pi \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = 0$$

$$\frac{3\pi}{9} + \frac{6\pi}{9} = \pi \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} = 0$$

$$\frac{4\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} = \pi \Rightarrow \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} = 0$$

پس $A = -1$ خواهد شد. (نصیری) (پایه یازدهم - فصل چهارم - درس دوم - نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل)

۱۰ - گزینه «۳» - با توجه به مدل شکل بایستی m و $1-m$ هم علامت باشند پس:

$$m(1-m) > 0 \Rightarrow 0 < m < 1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل چهارم - درس سوم - رسم توابع مثلثاتی)

۱۱ - گزینه «۱» -

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x = \Delta^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \Delta^{-2x} = \Delta^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow -2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_{\sqrt{2}}(16x^2 + 1) = \log_{\sqrt{2}}\left(16 \times \frac{1}{16} + 1\right) = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^2 = 2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل پنجم - دروس اول و دوم - تابع نمایی و لگاریتمی)

۱۲ - گزینه «۳» -

$$f(3x-6) = x^2 + 4x \Rightarrow 3x-6 = f^{-1}(x^2 + 4x) \quad (*)$$

$$x^2 + 4x = 21 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+7) = 0 \xrightarrow{x \geq 2} x = 3$$

$$x = 3 \xrightarrow{(*)} 3 \times 3 - 6 = f^{-1}(9 + 12) \Rightarrow f^{-1}(21) = 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - تابع وارون)

۱۳ - گزینه «۴» -

$$f(2) = a + 1, \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - \sqrt{x+1}) = 2 - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(b + \frac{x-2}{\sqrt{3x-2}}\right) = b + \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{3x+2})}{(\sqrt{3x-2})(\sqrt{3x+2})} = b + \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{3x+2})}{2(x-2)} = b + \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{3x+2}}{2} = b + 2$$

$$\begin{cases} a+1=1 \\ b+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 12} f^2(x) = \left(-1 + \frac{12-2}{6-2}\right)^2 = \left(-1 + \frac{10}{4}\right)^2 = 2^2 = 4$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل ششم - درس سوم - پیوستگی)

۱۴ - گزینه «۳» - تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S) = \frac{6!}{2!} = 360 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{360}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال)

۱۵ - گزینه «۳» -

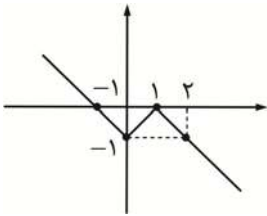
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{22} (x_i - \bar{x})^2}{N} \Rightarrow (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{22} - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \bar{x})^2 = 22 \times 5$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{22} (x_i - \bar{x})^2 = 110 \Rightarrow \text{واریانس جدید} = \frac{110}{20} = \frac{11}{2} = 5.5$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس دوم - واریانس)

۱۶ - گزینه «۲» - نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

$$y = |x| - |x-1| - x \quad \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$



ملاحظه می‌کنید که تابع در فاصله $[0, 1]$ صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - تابع وارون)

۱۷ - گزینه «۲» -

$$\sin 4x = \cos x \Rightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 4x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \nabla x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{(4k+1)\pi}{10} \quad (1) \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{(4k+1)\pi}{6} \quad (2) \end{cases}$$

به‌ازای $k = 5$ مجموعه جواب (۱) برابر $\frac{21\pi}{10}$ می‌شود. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - معادلات مثلثاتی)

۱۸ - گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{x^2-x-6} = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ \text{HOP: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{3x^2-1} = 4 \Rightarrow \frac{a}{11} = 4 \Rightarrow a=44 \Rightarrow b=-88 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{bx}{5} \right] = \left[\frac{b}{5} \right] = \left[\frac{-88}{5} \right] = \left[\frac{-176}{10} \right] = \left[-17.6 \right] = -18$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - حد توابع کسری)

۱۹ - گزینه «۴» - بایستی مخرج ریشه مضاعف $x=2$ بدهد. پس باید عبارت x^2+bx+c معادل $(x-2)^2$ باشد.

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{4bc} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - حد نامتناهی)

۲۰ - گزینه «۳» - g را به صورت $g(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم. پس $f(x) = \frac{(4+a)x+b}{x+2\sqrt{x^2+8}}$ خواهد شد.

$$f(1) = 1 \Rightarrow \frac{4+a+b}{1+2\sqrt{9}} = 1 \Rightarrow a+b = 3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4+a)x}{x+2\sqrt{x^2}} = \frac{4+a}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{(1)} b = 2$$

پس دوتایی (a, b) برابر است با: $(1, 2)$ (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - حد در بی‌نهایت)

۲۱ - گزینه «۲» - خواسته سوال $f'(7)$ است.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{(x+1)^2}}(x-8) - \sqrt{x+1}}{(x-8)^2} \Rightarrow f'(7) = \frac{\frac{1}{12}(-1) - 2}{(-1)^2} = \frac{-25}{12}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - دروس اول و دوم - تعریف مشتق و فرمول‌های مشتق)

۲۲ - گزینه «۲» - تابع در $x = 1$ پیوسته است. در همسایگی راست $x = 1$ قدرمطلق را تعیین علامت و جزء صحیح را تعیین مقدار می‌کنیم:

$$f(x) = (x-1)x - (-1)x^2 = 2x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 4x - 1 \Rightarrow f'_+(1) = 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌های یکطرفه)

۲۳ - گزینه «۴» -

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow y'(1) = g'(1)f'(g(1))$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)(x+2)} = 1 \Rightarrow f'(2) \times \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow f'(2) = 4$$

$$g(x) = \frac{4}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{-4}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(1) = -1$$

$$y'(1) = -1 \times f'(2) = -1 \times 4 = -4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق تابع مرکب)

۲۴ - گزینه «۱» -

$$\frac{f(2) - f(1)}{2-1} = 2f'(x) \Rightarrow \frac{10-2}{2-1} = 2(3x^2+1) \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x \in [1, 2]} x = 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس سوم - آهنگ تغییر)

۲۵ - گزینه «۲» -

$$f(x) = x^3 + ax^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \times 4 + 2a \times 2 = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(3) = 12$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - اکسترم‌های تابع)

۲۶ - گزینه «۱» - اگر $g(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه نقاط بحرانی تابع $|g(x)|$ از حل معادله‌های $g(x) = 0$ و $g'(x) = 0$ به دست می‌آید.

$$g(x) = x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1, 5$$

$$g'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

مجموع طول‌های نقاط بحرانی برابر ۶ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - نقاط بحرانی)

۲۷ - گزینه «۱» -

$$\log_6 18 = \log_{2 \times 3} 9 \times 2 = \frac{\log 3^2 + \log 2}{\log 2 + \log 3} = \frac{2 \log 3 + \log 2}{\log 2 + \log 3} = \frac{2 \log_2 3 + 1}{\log_2 3 + 1} = \frac{2a + 1}{a + 1}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل پنجم - لگاریتم)

$$V = \pi r^2 h \xrightarrow{r^2 = f - h} V = \pi h(f - h) = \pi(fh - h^2)$$

$$V' = \pi(f - 2h) = 0 \Rightarrow h = \frac{f}{2}, r^2 = \frac{f}{2} \Rightarrow V_{\max} = \pi \times \frac{f}{2} \times \frac{f}{2} = \frac{\pi f^2}{4}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - بهینه‌سازی)

۲۹ - گزینه «۴» - در واقع باید تابع $f(x)$ را به صورت $f(x+1) + k$ تبدیل کنیم:

$$f(x+1) = 3(x+1)^2 - 6(x+1) + 1 = 3(x^2 + 2x + 1) - 6x - 6 + 1 = 3x^2 - 2$$

$$f(x+1) + k = 3x^2 - 2 + k = 3x^2$$

پس $k = 2$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - رسم توابع به کمک انتقال)

۳۰ - گزینه «۱» - باید مهره‌های انتخابی دو مهره قرمز، یک مهره آبی یا هر سه قرمز باشد.

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1} + \binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{7}{10}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل هفتم - احتمال)