

ریاضیات

۱- گزینه «۳» -

$$B = (\sqrt{3})^{3+2\sqrt{2}} \times 3^{1-\sqrt{2}} = 3^{\frac{3}{2}+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$$

$$C = \sqrt{243} + \sqrt[3]{27} = 3^{\frac{5}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^4$$

$$A = \frac{B}{C} = 3^{\frac{5}{2}} \div 3^4 = 3^{\frac{5}{2}-4} = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$$

(نصیری) (پایه دهم - قوانین رادیکالها)

۲- گزینه «۴» -

$$\begin{cases} t_1 t_2 = 8 \\ t_2 t_3 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 t_1 r^2 = 8 \\ t_1 r^2 t_1 r^4 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1^2 r^2 = 8 \\ t_1^2 r^6 = 32 \end{cases} \xrightarrow{\div} r^4 = 4 \Rightarrow r^2 = 2$$

$$t_1^2 r^2 = 8 \xrightarrow{r^2=2} t_1^2 \times 2 = 8 \Rightarrow t_1^2 = 4$$

$$t_3 t_4 = t_1 r^4 \times t_1 r^6 = t_1^2 r^{10} = 4 \times 2^5 = 4 \times 32 = 128$$

(نصیری) (پایه دهم - الگو و دنباله - دنباله هندسی)

۳- گزینه «۱» -

$$P(1) = 3 \Rightarrow 1 + 2 - A + 4 = 3 \Rightarrow A = 4$$

$$Bx^2 - 3x - A = 0 \xrightarrow{A=4} Bx^2 - 3x - 4 = 0$$

اگر ریشه‌ها را  $\alpha$  و  $\beta$  فرض کنیم:

$$\alpha = \beta + 2 \Rightarrow \alpha - \beta = 2 \Rightarrow |\alpha - \beta| = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \Delta = 4a^2 \Rightarrow 9 + 16B = 4B^2 \Rightarrow 4B^2 - 16B - 9 = 0$$

$$B = \frac{4 \pm \sqrt{64 + 4 \times 9}}{4} = \frac{4 \pm 10}{4} = \frac{9}{2}, -\frac{1}{2} \xrightarrow{B > 0} B = \frac{9}{2}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - معادلات - روابط بین ریشه‌ها)

۴- گزینه «۱» -

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120 \Rightarrow (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = 120 \Rightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 120$$

$$\Rightarrow (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 - 120 = 0$$

$$(x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) - 96 = 0 \Rightarrow (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1, -6 \\ x^2 + 5x + 16 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

پس معادله فقط دو ریشه حقیقی دارد. (نصیری) (پایه یازدهم - معادلات - تغییر متغیر)

۵- گزینه «۳» - مفهوم سوال این تابع همواره زیر محور  $x$ ها قرار گیرد.

$$\Delta = (-2k)^2 - 4(k-3)(3k-6) < 0 \xrightarrow{\div 4} k^2 - 2(k-3)(k-2) < 0 \Rightarrow k^2 - 2(k^2 - 5k + 6) < 0$$

$$\Rightarrow -2k^2 + 10k - 12 < 0 \Rightarrow (k-6)(-2k+3) < 0 \Rightarrow k \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (6, +\infty) \quad (1)$$

از طرفی باید ضریب  $x^2$  منفی باشد.

$$k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2 \quad (2)$$

اشتراک (1) و (2) جواب سوال است.

$$(1) \cap (2) \Rightarrow k < \frac{3}{2}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - معادلات - معادله درجه ۲)

۶- گزینه «۴» - تابع  $y = ax^2 + bx + c$  محور طول‌ها را با طول‌های ۳- و ۲ قطع کرده است پس تابع  $y = a(x-2)(x+3)$  تبدیل می‌شود و چون محور عرض‌ها را در ۱- قطع کرده است پس:

$$f(0) = -1 \Rightarrow -1 = a(-2)(+3) \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

(نصیری) (پایه دهم - سهمی)

۷- گزینه «۱» - چون برد تابع  $\{0, -4\}$  است و از طرفی  $a^{\wedge} + 2b^{\frown}$  نامنفی است. پس:

$$\begin{cases} a^{\wedge} + 2b^{\frown} = 0 \\ m^{\frown} + 4m = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \Rightarrow a^{\frown} + b^{\wedge} + m = -2 \\ m = -2 \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دهم - تابع - زوج مرتب)

۸- گزینه «۳» - نامعادله داده شده به سه نامعادله تبدیل می‌شود.

$$|x-6| < 10 \Rightarrow -10 < x-6 < 10 \xrightarrow{+6} -4 < x < 16 \quad (1)$$

$$|x-3| < |x-6| \Rightarrow (x-3+x-6)(x-3-x+6) < 0 \Rightarrow 2x < 9 \Rightarrow x < \frac{9}{2} \quad (2)$$

$$|x-3| > 2 \Rightarrow x-3 > 2 \vee x-3 < -2 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty) \quad (3)$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده را محاسبه می‌کنیم:

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow -4 < x < 1 \Rightarrow \text{وسط بازه} = \frac{-4+1}{2} = -1/2$$

(نصیری) (پایه دهم - نامعادلات - قدرمطلق)

۹- گزینه «۱» -

$$2x-6 > 0 \Rightarrow x > 3 \quad (1)$$

$$\log_{1/4}(2x-6) + 2 \geq 0 \Rightarrow \log_{1/4}(2x-6) \geq -2 \Rightarrow 2x-6 \leq (1/4)^{-2}$$

$$\Rightarrow 2x-6 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \Rightarrow 2x \leq \frac{25}{4} + 6 = \frac{49}{4} \Rightarrow x \leq \frac{49}{8} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 3 < x \leq \frac{49}{8} \Rightarrow D_f = \left(3, \frac{49}{8}\right]$$

اعداد طبیعی این بازه عبارتند از:  $\{4, 5, 6\}$  (نصیری) (پایه یازدهم - تابع لگاریتمی - دامنه لگاریتمی)

۱۰- گزینه «۲» -

$$\text{fog}(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = h(x) \Rightarrow f(3x+2) = 9x^2 + 12x + 7$$

مجموع ضرایب  $f(x)$  برابر  $f(1)$  است.

$$3x+2=1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(1) = 9 \times \frac{1}{9} + 12 \times \frac{-1}{3} + 7 = 1 - 4 + 7 = 4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب دو تابع)

۱۱- گزینه «۴» -

$$2x-1=7 \Rightarrow x=4 \Rightarrow g(4) = f(7) + 2 \Rightarrow g(4) = 2 \Rightarrow g^{-1}(2) = 4$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع - تابع وارون)

۱۲- گزینه «۴» -

$$3^{2x} \times 3^2 - 3^x \times 3^3 - 3^x + 3 = 0 \xrightarrow{3^x=t} 9t^2 - 27t - t + 3 = 0 \Rightarrow 9t(t-3) - (t-3) = 0 \Rightarrow (t-3)(9t-1) = 0 \Rightarrow t = 3, \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ 3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعه جواب ها} = 1 - 2 = -1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع نمایی - معادله نمایی)

۱۳- گزینه «۲» -

$$3^{y+2} = 27^2 y^{2-1} \Rightarrow 3(27y^2 - 1) = y + 2 \Rightarrow 6y^2 - y - 5 = 0 \xrightarrow{y>0} y = 1$$

$$\log_{\sqrt{y}} \sqrt[5]{49} + \log_{16y} \sqrt{2y} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt[5]{49} + \log_{16} \sqrt{2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{4}{5} + \frac{1}{4} = \frac{32+5}{40} = \frac{37}{40}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع نمایی و لگاریتمی - معادله نمایی و لگاریتمی)

۱۴- گزینه «۳» -

$$A = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 73\pi\right) + \cos^2\left(\frac{49\pi}{6}\right) + \sin 111^\circ = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right) + \cos^2\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin(6 \times 18^\circ + 3^\circ)$$

$$-\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin 3^\circ = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = -1 + 0.75 + 0.5 = 0.25$$

(نصیری) (پایه یازدهم - مثلثات - تغییر زاویه)

۱۵- گزینه «۱» -

$$f(x) = \frac{f \sin \lambda x}{\cos^2 x} \times \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

به راحتی می توان ثابت کرد که  $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$  ، پس:

$$f(x) = \frac{f \sin \lambda x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x = f \sin \lambda x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - دوره تناوب)

۱۶- گزینه «۳» -

$$y = a - b \sin\left(\frac{\pi}{4} + cx\right) = a - b \cos cx$$

با توجه به نمودار، دوره تناوب  $\frac{2\pi}{c}$  ، ماکزیمم ۴ و مینیمم -۱ است.

$$T = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |c| = 3 \Rightarrow c = \pm 3$$

$$\begin{cases} \max y = 4 \\ \min y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + |b| = 4 \\ a - |b| = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2}, |b| = \frac{5}{2}$$

در این سوال مقدار c هر دو عدد ۳ و -۳ می تواند باشد زیرا  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  است. اما در مورد علامت b دقت کنید چون  $f(0) = 4$  است پس  $b < 0$  است، پس  $b = -\frac{5}{2}$  خواهد بود.

$$ab + c = \frac{3}{2} \times \frac{-5}{2} \pm 3 = -\frac{15}{4} \pm 3 = -3/75 \pm 3$$

در نتیجه جواب سوال  $-6/75$  یا  $-0/75$  خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - دوره تناوب و نمودار شناسی)

۱۷- گزینه «۱» -

$$\cos^2(\pi + 2x) = \sin^2(2\pi - 2x) + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin 2x \Rightarrow \cos^2 2x - \sin^2 2x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x = \sin 2x \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 2x = \sin 2x \Rightarrow 2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

مجموعه جواب های بدست آمده در بازه داده شده برابر است با:

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$$

پس معادله ۶ جواب دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - معادله)

۱۸- گزینه «۲» -

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\delta}\right)^+} \left[\frac{-3}{x}\right] = \left[\frac{-3}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^+}\right] = \left[-\frac{3}{\frac{1}{\delta}}\right] = [-(15^-)] = [-(15)^+] = -15$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد - حد براکت)

۱۹- گزینه «۱» - چون حد مخرج صفر است پس باید حد صورت هم در  $x = 2$  صفر شود.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (mx - \sqrt{x+2}) = 0 \Rightarrow 2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{4 \times 4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$n = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{2x} = \frac{3}{16}$$

حال به محاسبه حد دوم می پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} n x f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} n x \times \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} n \times \frac{x}{x^2} = \frac{1}{6} n \times \frac{1}{x} = 0$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد در بی نهایت)

۲۰- گزینه «۳» - با توجه به شکل شیب خط  $d$  برابر مشتق تابع  $f(x)$  در نقطه  $x = 4$  است پس:

$$f'(4) = \frac{f(\Delta) - f(2)}{\Delta - 2} \Rightarrow 2 = \frac{f(\Delta) - f(2)}{\Delta - 2} \Rightarrow f(\Delta) - f(2) = 6$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - خط مماس)

۲۱- گزینه «۱» -

$$f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 12x + 7 \Rightarrow f'(x) = 4x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2 - 3 + 12 + 7 = 14 \Rightarrow \max(-1, 14) \\ x = 2 \Rightarrow y = 16 - 12 - 24 + 7 = -13 \Rightarrow \min(2, -13) \end{cases}$$

$$y_{\max} + y_{\min} = 14 - 13 = 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - اکسترمم نسبی)

۲۲- گزینه «۳» - ابتدا دامنه تابع را حساب می کنیم.

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ 12 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 12 \end{cases} \Rightarrow D_f = [4, 12]$$

حال به جست و جوی نقاط بحرانی می پردازیم:

$$f(x) = \sqrt{x-4} - \sqrt{12-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} + \frac{1}{2\sqrt{12-x}}$$

$f'(x) = 0$  ریشه حقیقی ندارد، پس نقاط بحرانی دو نقطه  $x = 4$  و  $x = 12$  است.

$$f(4) = -\sqrt{8}, \quad f(12) = \sqrt{8}$$

کمترین مقدار تابع  $-\sqrt{8}$  است. (نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - اکسترمم مطلق)

۲۳- گزینه «۱» - مجموع انحراف از میانگین ها صفر است.

$$-6 - 4 - 3 + a + 1 + 2 + 5 + 6 + 7 + 8 = 0 \Rightarrow a = -16$$

$$\sigma^2 = \frac{(-6)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-16)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (5)^2 + (6)^2 + (7)^2 + (8)^2}{10} = 49/6$$

(نصیری) (پایه یازدهم - آمار - واریانس)

۲۴- گزینه «۲» - در کلمه TRANSLATION حروف تکراری را کنار هم می گذاریم TRANSLATION ملاحظه می کنید که دو حرف T، دو

حرف A و دو حرف N تکرار شده اند. پس حالتی که حروف تکراری کنار هم قرار نمی گیرند برابر است با:

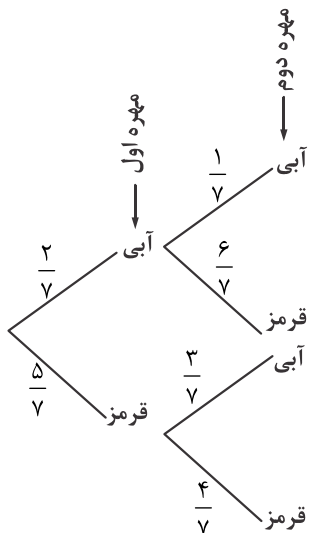
$$\frac{11!}{2!2!2!} - 8! = 7! \left( \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{8} - 8 \right) = 7! (990 - 8) = 982 \times 7!$$

(نصیری) (پایه دهم - شمارش بدون شمردن - جایگشت)

۲۵- گزینه «۲» - مجموع مربعات برابر پنج باشد فقط در دو زوج (۲, ۱) و (۱, ۲) رخ می دهد. پس احتمال مطلوب  $\frac{1}{18}$  یا  $\frac{2}{36}$  است.

(نصیری) (پایه دهم - احتمال - احتمال مقدماتی)

۲۶- گزینه «۴» -



$$P(\text{هم رنگ}) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{7} + \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{22}{49}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - احتمال - قاعده کل)

۲۷- گزینه «۴» - با فرض  $MA = x$  و  $MB = y$  داریم:

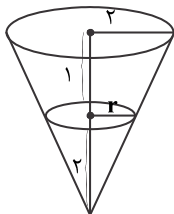
$$\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{y}{y+6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x+8 \Rightarrow x=8 \\ 2y = y+6 \Rightarrow y=6 \end{cases}$$

محیط مثلث  $MDC$  برابر است با:

$$8 + 8 + 6 + 6 + 10 = 38$$

(نصیری) (پایه یازدهم - هندسه - تشابه)

۲۸- گزینه «۴» -



اگر مثلث را حول  $d$  دوران دهیم، مخروطی ایجاد می شود، برش مورد نظر دایره ای به شعاع  $r$  می دهد که  $r$  را می توان با قضیه تالس محاسبه کرد.

$$\frac{r}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - هندسه - دوران)

۲۹- گزینه «۱» - با تغییر فرم معادله دو خط داریم:

$$3x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$6x - 8y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$$

بنابراین شیب دو خط برابر و دو خط موازی هستند، پس اندازه قطر دایره، همان فاصله دو خط موازی است. برای یافتن فاصله دو خط موازی از دو روش می‌توان استفاده کرد.

روش اول: ابتدا نقطه‌ای دلخواه مانند  $(0, \frac{3}{8})$  را روی خط  $6x - 8y + 3 = 0$  در نظر می‌گیریم، سپس فاصله این نقطه را از خط  $3x - 4y + 1 = 0$  به دست می‌آوریم. داریم:

$$\frac{|3(0) - 4(\frac{3}{8}) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10}$$

روش دوم: فاصله دو خط موازی به معادلات  $ax + by + c_1 = 0$  و  $ax + by + c_2 = 0$  از رابطه  $\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow 6x - 8y + 2 = 0 \\ 6x - 8y + 3 = 0 \end{cases}$$

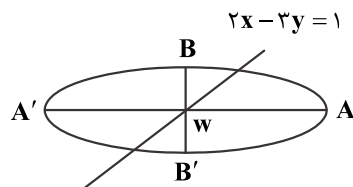
$$\Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|3 - 2|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{1}{10}$$

قطر دایره برابر  $\frac{1}{10}$ ، بنابراین شعاع دایره برابر  $\frac{1}{20}$  است و داریم:

$$S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = \pi \times (\frac{1}{20})^2 = \frac{\pi}{400}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - معادله و جبر - فاصله دو خط موازی)

۳۰- گزینه «۲» -



$$2(4m) - 3(3m) = -1 \Rightarrow m = 1$$

$$a = |WA| = 8 - 4 = 4$$

$$b = |WB| = 6 - 3 = 3$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

مختصات مرکز را در خط  $2x - 3y = 1$  صدق دهیم:

پس مرکز بیضی  $W(4, 3)$  می‌باشد.

(نصیری) (پایه دوازدهم - هندسه - بیضی)