

ریاضی

۱- گزینه «۱» - در این دنباله جملاتی که هم مربع کامل و هم مکعب کامل باشند، مقدارشان طبیعی خواهند بود. این جملات به فرم k^6 ، $k \in \mathbb{N}$ خواهند بود.

$$n \in \{1^6, 2^6, 3^6\} \Rightarrow n \in \{1, 64, 729\}$$

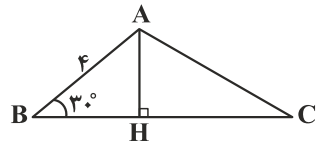
$$a_1 = 1+1=2, a_{64} = 2^3 + 2^2 = 12, a_{729} = 3^3 + 3^2 = 36$$

سایر جملات گنگ‌اند. (نصیری) (پایه دهم - دنباله) (متوسط)

۲- گزینه «۱» -

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 30^\circ = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times BC \times \frac{1}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow BC = 6\sqrt{3}$$

حال ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:



$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = 2$$

$$BH = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow HC = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\Delta AHC: \tan \hat{C} = \frac{AH}{HC} = \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

(نصیری) (پایه دهم - مثلثات) (آسان)

۳- گزینه «۳» - چون $A = \sqrt{7} - \sqrt{6}$ است، پس:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$$

$$B = \sqrt{\left(A + \frac{1}{A}\right) \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} = \sqrt{\left((\sqrt{7} - \sqrt{6}) + (\sqrt{7} + \sqrt{6})\right) \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}$$

$$B = \sqrt{2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

(نصیری) (پایه دهم - ریشه و توان - گویا کردن) (آسان)

۴- گزینه «۴» - از روش دسته‌بندی استفاده می‌کنیم:

$$(4x^3 + 8x^2) + (4x^2 + 8x) + (-3x - 6) = 4x^2(x+2) + 4x(x+2) - 3(x+2) = (x+2)(4x^2 + 4x - 3) = (x+2)(2x-1)(2x+3)$$

بنابراین عامل $x-2$ وجود ندارد. (نصیری) (پایه دهم - عبارات جبری - تجزیه) (متوسط)

۵- گزینه «۱» - رقم سمت چپ ۷ یا ۸ خواهد بود. بقیه هر کدام از اعداد را می‌پذیرد.

$$2 \times 5 \times 5 = 50$$

اما دقت کنید که خود عدد ۷۰۰ جزء جواب نیست؛ یعنی تعداد حالات ۴۹ تاست. (نصیری) (پایه دهم - شمارش - اصل ضرب) (آسان)

۶- گزینه «۲» - حالت‌های زیر مطلوب است:

(الف) تاس‌ها اعداد ۴، ۶، ۶، ۶ بیایند، تعداد حالات $\frac{3!}{2!}$ است.

(ب) تاس‌ها اعداد ۵، ۵، ۶، ۶ بیایند، تعداد حالات $\frac{3!}{2!}$ است.

(پ) تاس‌ها اعداد ۶، ۶، ۵، ۶ بیایند، تعداد حالات $\frac{3!}{2!}$ است.

(ت) تاس‌ها اعداد ۶، ۶، ۶، ۶ بیایند، تعداد حالات ۱ است.

پس در کل $1 + 3 + 3 + 3 = 10$ حالت داریم:

$$P(A) = \frac{10}{6^3} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

(نصیری) (پایه دهم - احتمال - احتمال مقدماتی) (متوسط)

۷- گزینه «۳» - اگر وزن کنونی این شخص را W در نظر بگیریم، در این صورت:

$$\frac{W}{(1/8)^2} - \frac{W-x}{(1/8)^2} = 2 \Rightarrow x = 2(1/8)^2 = 6/48$$

یعنی اگر این شخص ۶/۴۸ کیلوگرم وزن کم کند، ۲ واحد از شاخص توده بدنی او کم می‌شود. (نصیری) (پایه دهم - آمار - شاخص توده بدنی) (متوسط)

۸- گزینه «۱» - اگر سهمی داده شده بر محور Xها مماس باشد، $\Delta = 0$ است.

$$\Delta = b^2 - 4(-2)(c) = 0 \Rightarrow b^2 + 12c = 0 \Rightarrow b^2 = -12c \Rightarrow c < 0$$

حال دلتای معادله داده شده را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4(-2)(c-1) = \underbrace{b^2 + 12c}_{0} - 12 = -12$$

چون $\Delta = -12$ است، پس $\Delta < 0$ است و در نتیجه معادله ریشه حقیقی ندارد.

(نصیری) (پایه یازدهم - معادله درجه دوم - علامت ریشه‌ها) (دشوار)

۹- گزینه «۴» - WM بر L در M عمود است.

$$m_{WM} = \frac{6-4}{4-2} = 2 \Rightarrow M_L = -\frac{1}{2}$$

معادله خط L را با داشتن یک نقطه و شیب آن به دست می‌آوریم:

$$L: y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow 2y - 12 = -x + 4 \Rightarrow x + 2y = 16 \xrightarrow{y=0} x = 16 \Rightarrow x_N = 16$$

(نصیری) (پایه یازدهم - جبر و معادله - هندسه تحلیلی) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» - با فرض $AE = EG = x$ و متشابه بودن دو مثلث EGF و BGC داریم:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{EG}{GC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{EG}{GC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{GC} \Rightarrow GC = \frac{3}{2}x$$

$$\triangle ABC: DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{x}{x + x + \frac{3}{2}x} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{x}{\frac{5}{2}x} = \frac{2}{5}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - هندسه - تالس و تشابه) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» - با توجه به ابعاد مسئله P و Q وسط ساق‌ها هستند، پس:

$$2(x - 0/2) = 2x - 6 + x - 0/4 \Rightarrow 2x - 0/4 = 4x - 6/4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow PQ = 2/8$$

(نصیری) (پایه یازدهم - هندسه - تالس و تشابه) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» - مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن دنباله حسابی تشکیل دهند به صورت $3d, 4d, 5d$ هستند.

$$3d + 4d = 24/5 \Rightarrow 7d = 24/5 \Rightarrow d = 3/5$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3d \times 4d = 2d^2 = 6 \times (3/5)^2 = 72/5$$

(نصیری) (پایه دهم - دنباله - دنباله حسابی) (آسان)

۱۳- گزینه «۴» - برای آن که f یک تابع باشد، باید:

$$\begin{cases} 2a = b \\ 3a = 7 - 2b \end{cases} \Rightarrow 2a = 7 - 4a \Rightarrow a = 1, b = 2$$

$$f = \{(1, 2), (2, 3)\}, g = \{(1, 2), (2, 5)\}$$

$$f + g = \{(1, 4), (2, 8)\}, f - g = \{(1, 0), (2, -2)\}$$

$$\frac{f+g}{f-g+1} = \left\{ \left(1, \frac{4}{0+1}\right), \left(2, \frac{8}{-2+1}\right) \right\} = \{(1, 4), (2, -8)\}$$

حاصل ضرب اعضای برد $32 - 32$ است. (نصیری) (پایه یازدهم - اعمال دو تابع) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» -

$$f(x) = x + a \Rightarrow f^{-1}(x) = x - a$$

$$\text{فاصله } f \text{ و } f^{-1} \text{ در واقع فاصله دو خط موازی } \begin{cases} y - x = a \\ y - x = -a \end{cases} \text{ است.}$$

$$\frac{|a - (-a)|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |2a| = 4 \Rightarrow |a| = 2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع - وارون تابع) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» -

$$[x + \frac{1}{4}] + [x + \frac{9}{4}] = 0 \Rightarrow [x + \frac{1}{4}] + [x + \frac{1}{4}] = -2 \Rightarrow [x + \frac{1}{4}] = -1 \Rightarrow -1 \leq x + \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow -\frac{5}{4} \leq x < -\frac{1}{4}$$

$$D = \mathbb{R} - \left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right) = (-\infty, -\frac{5}{4}) \cup \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع - دامنه تابع) (متوسط)

۱۶- گزینه «۳» -

$$\cos^2 \frac{11\pi}{3} = \sin(3\pi + \alpha) \cos\left(\frac{19\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$\cos^2\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(\pi + \alpha) \cos(10\pi - \frac{\pi}{3} - \alpha)$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{3} = -\sin \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \Rightarrow \frac{1}{4} = (-\sin \alpha)(-\sin \alpha) \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{3}, \cot^2 \alpha = 3$$

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - مثلثات - تغییر زاویه) (متوسط)

۱۷- گزینه «۴» -

$$\log_m 2 = 3 \Rightarrow m^3 = 2 \Rightarrow m = \sqrt[3]{2}$$

$$\log_2 (6 \log_2 m) = \log_2 (6 \log_2 2^{\frac{1}{3}}) = \log_2 2 = 1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - لگاریتم - معادله لگاریتمی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۱» - تابع داده شده به صورت زیر است:

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), \dots, (20, a_{20})\}$$

چون تابع ثابت است، پس $a_1 = a_2 = \dots = a_{20}$ خواهد بود و داده‌های آماری همگی برابر $2a_1$ است. میانگین برابر یکی از داده‌ها یعنی $2a_1$ و واریانس برابر صفر است.

$$\bar{x} + \delta^2 = 2a_1 + 0 = 2a_1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - آمار - واریانس و میانگین) (آسان)

۱۹- گزینه «۲» - ۵ نفر را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

رامبد و پویا	A, B, C
دسته اول	دسته دوم

$$n(A) = \binom{2}{1} \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 7$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{\binom{5}{3}} = \frac{7}{10}$$

(نصیری) (پایه دهم - احتمال - احتمال مقدماتی) (متوسط)

۲۰- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (a[-x^2] + 1) \times \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{-1}{x^2} + 2\right) = (-1 \cdot a + 1)(-1 + 2) = -9 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = [-(4^-)] + 1 = -4 + 1 = -3$$

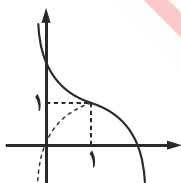
(نصیری) (پایه یازدهم - حد - حدبراکت‌ها) (متوسط)

۲۱- گزینه «۲» -

$$|f(f(x))| = f(2x) \Rightarrow |x - 6| = 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 6 = 2x - 3 \Rightarrow x = -3 \\ x - 6 = 3 - x \Rightarrow x = 4/5 \end{cases}$$

$x = -3$ قابل قبول نیست و فقط $x = 4/5$ جواب معادله است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب دو تابع) (آسان)

۲۲- گزینه «۲» - نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که تابع نزولی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی) (متوسط)

۲۳- گزینه «۱» -

$$\cos \Delta x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ \Delta x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}(4k+1) \\ x = \frac{\pi}{4}(4k-1) \end{cases}$$

به ازای $k=7$ دسته جواب اول به صورت $x = \frac{29\pi}{12}$ تبدیل می شود. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - معادله مثلثاتی) (متوسط)

۲۴- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+2} + 3^{2x-1}}{2^{2x+1} + 8^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{2x-1}}{3^{2x+1}} = \frac{1}{9}$$

(نصیری) (دوازدهم) (پایه دوازدهم - حد - حد در بی نهایت) (متوسط)

۲۵- گزینه «۲» -

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 7}{2(x+2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 7}{x - (-2)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 7 \\ f'(-2) = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 f(2x) \Rightarrow g'(x) = 2xf(2x) + 2x^2 f'(2x) \Rightarrow g'(-1) = -2f(-2) + 2f'(-2) = -2 \times 7 + 2 \times 1 = -12$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق تابع مرکب) (متوسط)

۲۶- گزینه «۲» -

$$f'(x) = fax^r - fa = 0 \Rightarrow x = 1$$

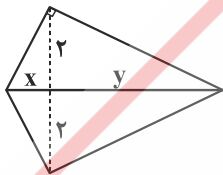
$$f(1) = 10 \Rightarrow a - fa + a^r = 10 \Rightarrow a^r - ra - 10 = 0$$

$$(a - \Delta)(a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \Delta \\ a = -2 \end{cases} \xrightarrow{a < 0} a = -2 \Rightarrow f(x) = -2x^r + 8x + 4 \Rightarrow f(2) = -32 + 16 + 4 = -12$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - نقطه بحرانی) (متوسط)

۲۷- گزینه «۴» - جسم به دست آمده دو مخروط است که دو قاعده بر هم منطبق اند.

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3}(r)^2 x + \frac{\pi}{3}(r)^2 y = \frac{4\pi}{3}(x+y)$$



$$xy = 4$$

از طرفی $AH^2 = BH \times HC$ است، پس:

برای آن که $x+y$ مینیمم شود، باید $x=y=2$ باشد.

$$V_{\min} = \frac{4\pi}{3}(2+2) = \frac{16\pi}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق و هندسه - دوران و بهینه سازی) (دشوار)

۲۸- گزینه «۳» -

$$a^2 + b^2 > 4c \Rightarrow 9 + 16 > 4|m-1| \Rightarrow |m-1| < \frac{25}{4} \Rightarrow -\frac{25}{4} < m-1 < \frac{25}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} < m < \frac{33}{4}$$

m های صحیح عبارتند از $\{-5, -4, \dots, 7\}$ که تعداد آن ها ۱۳ تاست. (نصیری) (پایه دوازدهم - هندسه - دایره) (آسان)

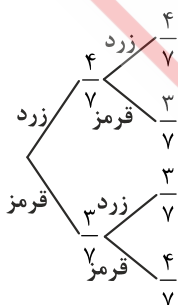
۲۹- گزینه «۱» -

$$a+c=3 \xrightarrow{\frac{c=1}{a=2}} 2c+c=3 \Rightarrow c=1, a=2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4 = b^2 + 1 \Rightarrow b = \sqrt{3} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - هندسه - بیضی) (ساده)

۳۰- گزینه «۲» -



$$P(\text{همرنگ باشند | هر دو زرد}) = \frac{\frac{4}{6} \times \frac{4}{6}}{\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}} = \frac{16}{12+16} = \frac{4}{7}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - احتمال - قاعده کل) (متوسط)