

## حسابان

۱- گزینه «۲» - با توجه به توضیحات مسئله، بایستی اشتراک دو بازه، یک عدد حقیقی باشد. پس:

$$4 - k = k + 1 \Rightarrow 2k = 3 \Rightarrow k = 1/5 \Rightarrow (k, k^2) = (1/5, 2/25) \Rightarrow \text{طول بازه} = 2/25 - 1/5 = -4/25$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل اول - درس اول - مجموعه‌های متناهی)

۲- گزینه «۱» - با فرض  $x^3 = A$  داریم:

$$A^2 + A + 3m = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = A_1 \\ A = A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1^3 = A_1 \\ X_2^3 = A_2 \end{cases} \Rightarrow X_1^3 + X_2^3 = A_1 + A_2 = -\frac{b}{a} = -1 = \frac{1}{m+1} \Rightarrow m = -2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس دوم - مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله درجه ۳)

۳- گزینه «۲» - اگر طرفین رابطه داده شده را بر  $x^2$  تقسیم کنیم:

$$x^2 + 1 = \frac{9}{x^2} \Rightarrow \frac{9}{x^2} - x^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{x^2} - 18 + x^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{x^2} + x^2 = 19 \Rightarrow \frac{9 + x^4}{x^2} = 19 \Rightarrow \frac{x^4}{9 + x^4} = \frac{1}{19}$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل سوم - اتحادها)

۴- گزینه «۴» -

$$\sqrt{\sqrt{a+1} + a - 1} = \sqrt{2a - 2} \Rightarrow \sqrt{a+1} + a - 1 = 2a - 2 \Rightarrow \sqrt{a+1} = a - 1 \Rightarrow a + 1 = a^2 - 2a + 1 \Rightarrow a^2 - 3a = 0$$

$$\Rightarrow a(a - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ غیرقابل قبول} \\ a = 3 \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

$$a = 3 \Rightarrow \left| \left[ \frac{a}{3} \right] + \left[ -\frac{3}{a} \right] \right| = \left| \left[ 1 \right] + \left[ -1 \right] \right| = 0$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس سوم - معادلات رادیکالی)

۵- گزینه «۳» -

$$A = f(1) + f(2) + \dots + f(9) = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \dots + \cos \frac{8\pi}{9} + \cos \frac{9\pi}{9}$$

$$\frac{\pi}{9} + \frac{8\pi}{9} = \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = 0$$

$$\frac{2\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} = \pi \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = 0$$

$$\frac{3\pi}{9} + \frac{6\pi}{9} = \pi \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} = 0$$

$$\frac{4\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} = \pi \Rightarrow \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} = 0$$

پس  $A = -1$  خواهد شد. (نصیری) (پایه یازدهم - فصل چهارم - درس دوم - نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل)

۶- گزینه «۳» -

$$\cot\left(\frac{3\pi}{4} - \beta\right) = 2 \Rightarrow \tan \beta = 2$$

$$\tan(\alpha + \beta) = 5 \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 5 \Rightarrow \frac{\tan \alpha + 2}{1 - 2 \tan \alpha} = 5 \Rightarrow 5 - 10 \tan \alpha = \tan \alpha + 2 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{11}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{121} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{130}{121} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{121}{130}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل چهارم - روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا)

۷- گزینه «۳» - با توجه به مدل شکل بایستی  $1-m$  و  $m$  هم علامت باشند پس:

$$m(1-m) > 0 \Rightarrow 0 < m < 1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل چهارم - درس سوم - رسم توابع مثلثاتی)

۸- گزینه «۱» -

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x = 5^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 5^{-2x} = 5^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow -2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_{\sqrt{2}}(16x^2 + 1) = \log_{\sqrt{2}}\left(16 \times \frac{1}{16} + 1\right) = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{1}{2}} = 2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل پنجم - دروس اول و دوم - تابع نمایی و لگاریتمی)

۹- گزینه «۳» -

$$f(3x-6) = x^2 + 4x \Rightarrow 3x-6 = f^{-1}(x^2 + 4x) \quad (*)$$

$$x^2 + 4x = 21 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+7) = 0 \xrightarrow{x \geq 2} x = 3$$

$$x = 3 \xrightarrow{(*)} 3 \times 3 - 6 = f^{-1}(9 + 12) \Rightarrow f^{-1}(21) = 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - تابع وارون)

۱۰- گزینه «۴» -

$$f(2) = a + 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - \sqrt{x+1}) = 2 - 2 = 1$$

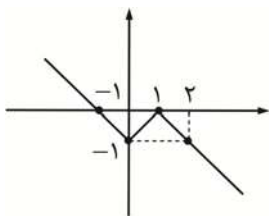
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(b + \frac{x-2}{\sqrt{3x}-2}\right) = b + \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{3x}+2)}{(\sqrt{3x}-2)(\sqrt{3x}+2)} = b + \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{3x}+2)}{3(x-2)} = b + \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{3x}+2}{3} = b + 2$$

$$\begin{cases} a+1=1 \\ b+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 12} f^2(x) = \left(-1 + \frac{12-2}{6-2}\right)^2 = \left(-1 + \frac{9}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل ششم - درس سوم - پیوستگی)

۱۱- گزینه «۲» - نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

$$y = |x| - |x-1| - x \quad \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$



ملاحظه می‌کنید که تابع در فاصله  $[0, 1]$  صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - تابع وارون)

۱۲- گزینه «۲» -

$$\sin 4x = \cos x \Rightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 4x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{(4k+1)\pi}{10} \quad (1) \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{(4k+1)\pi}{6} \quad (2) \end{cases}$$

به‌ازای  $k = 5$  مجموعه جواب (۱) برابر  $\frac{21\pi}{10}$  می‌شود. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - معادلات مثلثاتی)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{x^2-x-6} = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ \text{HOP: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{2x^2-1} = 4 \Rightarrow \frac{a}{11} = 4 \Rightarrow a=44 \Rightarrow b=-88 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{bx}{\Delta} \right] = \left[ \frac{b}{\Delta} \right] = \left[ \frac{-88}{\Delta} \right] = \left[ \frac{-176}{10} \right] = [-17/6] = -18$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - حد توابع کسری)

۱۴- گزینه «۴» - بایستی مخرج ریشه مضاعف  $x=2$  بدهد. پس باید عبارت  $x^2+bx+c$  معادل  $(x-2)^2$  باشد.

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{4bc} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - حد نامتناهی)

۱۵- گزینه «۳» -  $g$  را به صورت  $g(x) = ax+b$  در نظر می‌گیریم. پس  $f(x) = \frac{(4+a)x+b}{x+2\sqrt{x^2+8}}$  خواهد شد.

$$f(1) = 1 \Rightarrow \frac{4+a+b}{1+2 \times 3} = 1 \Rightarrow a+b=3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4+a)x}{x+2\sqrt{x^2}} = \frac{4+a}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow a=1 \xrightarrow{(1)} b=2$$

پس دوتایی  $(a, b)$  برابر است با:  $(1, 2)$  (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - حد در بی‌نهایت)

۱۶- گزینه «۲» - خواسته مسئله  $\frac{1}{2}f'(\frac{\pi}{2})$  است.

$$f'(x) = -3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \tan^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) \left[1 + \tan^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -3 \times 1 \times 2 = -6 \Rightarrow \frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - دروس اول و دوم - تعریف مشتق و فرمول‌های مشتق)

۱۷- گزینه «۲» - تابع در  $x=1$  پیوسته است. در همسایگی راست  $x=1$  قدرمطلق را تعیین علامت و جزء صحیح را تعیین مقدار می‌کنیم:

$$f(x) = (x-1)x - (-1)x^2 = 2x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 4x - 1 \Rightarrow f'_+(1) = 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌های یکطرفه)

۱۸- گزینه «۴» -

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow y'(1) = g'(1)f'(g(1))$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)} = 1 \Rightarrow f'(2) \times \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow f'(2) = 4$$

$$g(x) = \frac{4}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{-4}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(1) = -1$$

$$y'(1) = -1 \times f'(2) = -1 \times 4 = -4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق تابع مرکب)

۱۹- گزینه «۱» -

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 2f'(x) \Rightarrow \frac{10-2}{2-1} = 2(3x^2+1) \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x \in [1, 2]} x = 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس سوم - آهنگ تغییر)