

حسابان

۱- گزینه «۳» -

$$a_n = r(a_{n-1})^r \Rightarrow a_1 r^{\Delta} = r(a_1 r^{\Delta})^r \Rightarrow r^{\Delta} = r r^{1-\Delta} \xrightarrow{r \neq 0} r^{\Delta} = \frac{1}{r} \xrightarrow{0 < r < 1} r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S_r}{S_r} = 1 + r^r = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = 1.25$$

(نصیری) (پایه یازدهم - دنباله - مجموع جملات دنباله هندسی)

۲- گزینه «۱» -

$$P(1) = 2 \Rightarrow 1 + 2 - A + 4 = 2 \Rightarrow A = 4$$

$$Bx^2 - 2x - A = 0 \xrightarrow{A=4} Bx^2 - 2x - 4 = 0$$

اگر ریشه‌ها را α و β فرض کنیم:

$$\alpha = \beta + 2 \Rightarrow \alpha - \beta = 2 \Rightarrow |\alpha - \beta| = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \Delta = 4a^2 \Rightarrow 9 + 16B = 4B^2 \Rightarrow 4B^2 - 16B - 9 = 0$$

$$B = \frac{4 \pm \sqrt{64 + 4 \times 9}}{4} = \frac{4 \pm 10}{4} = \frac{9}{2}, -\frac{1}{2} \xrightarrow{B > 0} B = \frac{9}{2}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - معادلات - روابط بین ریشه‌ها)

۳- گزینه «۳» - نامعادله داده شده به سه نامعادله تبدیل می‌شود.

$$|x - 6| < 10 \Rightarrow -10 < x - 6 < 10 \xrightarrow{+6} -4 < x < 16 \quad (1)$$

$$|x - 2| < |x - 6| \Rightarrow (x - 2 + x - 6)(x - 2 - x + 6) < 0 \Rightarrow 2x < 9 \Rightarrow x < \frac{9}{2} \quad (2)$$

$$|x - 2| > 2 \Rightarrow x - 2 > 2 \vee x - 2 < -2 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty) \quad (3)$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده را محاسبه می‌کنیم:

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow -4 < x < 1 \Rightarrow \text{وسط بازه} = \frac{-4 + 1}{2} = -1.5$$

(نصیری) (پایه دهم - نامعادلات - قدرمطلق)

۴- گزینه «۴» -

$$y = g(x) = f(2x - 1) + 2 \Rightarrow y - 2 = f(2x - 1) \Rightarrow 2x - 1 = f^{-1}(y - 2) \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 + f^{-1}(y - 2))$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 + f^{-1}(x - 2)) \Rightarrow g^{-1}(2) = \frac{1}{2}(1 + f^{-1}(0)) = 4$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع - تابع وارون)

۵- گزینه «۲» -

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x + 2) = h(x) \Rightarrow f(2x + 2) = 9x^2 + 12x + 7$$

مجموع ضرایب $f(x)$ برابر $f(1)$ است.

$$2x + 2 = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(1) = 9 \times \frac{1}{4} + 12 \times \frac{-1}{2} + 7 = 1 - 6 + 7 = 2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع - ترکیب دو تابع)

۶- گزینه «۳» -

$$A = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 72^\circ\right) + \cos^2\left(\frac{49\pi}{6}\right) + \sin 111^\circ = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right) + \cos^2\left(8\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin(6 \times 18^\circ + 3^\circ)$$

$$= -\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin 3^\circ = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = -1 + 0.75 + 0.5 = 0.25$$

(نصیری) (پایه یازدهم - مثلثات - تغییر زاویه)

۷- گزینه «۳» -

$$y = a - b \sin\left(\frac{\pi}{4} + cx\right) = a - b \cos cx$$

با توجه به نمودار، دوره تناوب $\frac{2\pi}{3}$ ، ماکزیمم ۴ و مینیمم -۱ است.

$$T = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |c| = 3 \Rightarrow c = \pm 3$$

$$\begin{cases} \max y = 4 \\ \min y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + |b| = 4 \\ a - |b| = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2}, |b| = \frac{5}{2}$$

در این سوال مقدار c هر دو عدد ۳ و -۳ می تواند باشد زیرا $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ است. اما در مورد علامت b دقت کنید چون $f(0) = 4$ است پس $b < 0$ است، پس $b = -\frac{5}{2}$ خواهد بود.

$$ab + c = \frac{3}{2} \times \frac{-5}{2} \pm 3 = -\frac{15}{4} \pm 3 = -3/75 \pm 3$$

در نتیجه جواب سوال $-6/75$ یا $-0/75$ خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - دوره تناوب و نمودار شناسی)

۸- گزینه «۱» -

$$\cos^2(\pi + 2x) = \sin^2(2\pi - 2x) + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin 2x \Rightarrow \cos^2 2x - \sin^2 2x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos 4x = \sin 2x \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 2x = \sin 2x \Rightarrow 2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \quad (2) \quad (3)$$

مجموعه جواب های بدست آمده در بازه داده شده برابر است با:

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$$

پس معادله ۶ جواب دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - معادله)

۹- گزینه «۲» -

$$3^y + 2 = 27^y y^{-1} \Rightarrow 3(27^y - 1) = y + 2 \Rightarrow 6y^2 - y - 5 = 0 \xrightarrow{y > 0} y = 1$$

$$\log_{\sqrt{y}} \sqrt[5]{49} + \log_{16y} \sqrt{2y} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt[5]{49} + \log_{16} \sqrt{2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{4}{5} + \frac{1}{8} = \frac{32+5}{40} = \frac{37}{40}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع نمایی و لگاریتمی - معادله نمایی و لگاریتمی)

۱۰- گزینه «۱» -

$$2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3 \quad (1)$$

$$\log_{1/4}(2x - 6) + 2 \geq 0 \Rightarrow \log_{1/4}(2x - 6) \geq -2 \Rightarrow 2x - 6 \leq (1/4)^{-2}$$

$$\Rightarrow 2x - 6 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow 2x \leq \frac{25}{4} + 6 = \frac{49}{4} \Rightarrow x \leq \frac{49}{8} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 3 < x \leq \frac{49}{8} \Rightarrow D_f = \left(3, \frac{49}{8}\right]$$

اعداد طبیعی این بازه عبارتند از: $\{4, 5, 6\}$ (نصیری) (پایه یازدهم - تابع لگاریتمی - دامنه لگاریتمی)

۱۱- گزینه «۲» -

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^+} \left[\frac{-3}{x}\right] = \left[\frac{-3}{\left(\frac{1}{5}\right)^+}\right] = \left[-\frac{3}{\frac{1}{5}}\right] = \left[-(15^-)\right] = \left[-(15)^+\right] = -15$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد - حد پراکت)

۱۲- گزینه «۱» - چون حد مخرج صفر است پس باید حد صورت هم در $x = 2$ صفر شود.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (mx - \sqrt{x+2}) = 0 \Rightarrow 2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{4 \times 4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$n = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{2x} = \frac{3}{16}$$

حال به محاسبه حد دوم می پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot x}{x^2} = 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - حد در بی نهایت)

۱۳- گزینه «۴» -

$$y = \frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = \frac{\sin(2x - x)}{\cos 2x} = \tan 2x$$

$$y' = 2(1 + \tan^2 2x) \Rightarrow y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}) = 2 \times 2 = 4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق تابع مثلثاتی)

۱۴- گزینه «۳» - با توجه به شکل شیب خط d برابر مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = 4$ است پس:

$$f'(4) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \Rightarrow 2 = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \Rightarrow f(5) - f(2) = 6$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - خط مماس)

۱۵- گزینه «۳» - ابتدا دامنه تابع را حساب می کنیم.

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ 12 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 12 \end{cases} \Rightarrow D_f = [4, 12]$$

حال به جست و جوی نقاط بحرانی می پردازیم:

$$f(x) = \sqrt{x-4} - \sqrt{12-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} + \frac{1}{2\sqrt{12-x}}$$

$f'(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد، پس نقاط بحرانی دو نقطه $x = 4$ و $x = 12$ است.

$$f(4) = -\sqrt{8}, \quad f(12) = \sqrt{8}$$

کمترین مقدار تابع $-\sqrt{8}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - اکسترمم مطلق)

۱۶- گزینه «۳» - $x = 1$ طول نقطه عطف قائم تابع است. پس باید ریشه داخل رادیکال باشد.

$$x + b = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

ضمناً نقطه $A(1, -2)$ در خود تابع هم صدق می کند.

$$-2 = a(1) + 1 \Rightarrow a = -3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - نقطه عطف)

۱۷- گزینه «۱» - با توجه به نمودار ضریب x^3 مثبت است پس گزینه «۴» صحیح نیست و طول نقطه عطف مثبت، عرض نقطه عطف منفی و همچنین

دو ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.

گزینه «۱»: $y = (x-6)(x-1)(x+2)$

گزینه «۲»: $y = (x-1)^2(x+2)$

گزینه «۳»: $y = (x+2)(x-1)(x+4)$

با توجه به فاصله های نقاط برخورد گزینه «۱» صحیح است. (نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - نمودار تابع درجه سوم)