حسابان

۱- گزینه «۳» ـ چون $A=\sqrt{۷}-\sqrt{۶}$ است، پس:

$$\frac{۱}{A}=\frac{۱}{\sqrt{۷}-\sqrt{۶}}\times\frac{\sqrt{۷}+\sqrt{۶}}{\sqrt{۷}+\sqrt{۶}}=\sqrt{۷}+\sqrt{۶}$$

$$B=\sqrt{(A+\frac{۱}{A})(\frac{۷}{۲}\sqrt{۷})}=\sqrt{((\sqrt{۷}-\sqrt{۶})+(\sqrt{۷}+\sqrt{۶}))(\frac{۷}{۲}\sqrt{۷})}$$

$$B=\sqrt{۲\sqrt{۷}\times\frac{۷}{۲}\sqrt{۷}}=\sqrt{۴۹}=۷$$

(نصیری) (پایه دهم ـ ریشه و توان ـ گویا کردن) (آسان)

۲- گزینه «۴» ـ از روش دسته‌بندی استفاده می‌کنیم:

$$(۴x^۳+۸x^۲)+(۴x^۲+۸x)+(-۳x-۶)=۴x^۲(x+۲)+۴x(x+۲)-۳(x+۲)=(x+۲)(۴x^۲+۴x-۳)=(x+۲)(۲x-۱)(۲x+۳)$$

بنابراین عامل $x-۲$ وجود ندارد. (نصیری) (پایه دهم ـ عبارات جبری ـ تجزیه) (متوسط)

۳- گزینه «۱» ـ

$$|x^۳+۴x-۵|<۳(x^۲+x+۵)\Rightarrow|(x-۱)(x^۲+x+۵)|<۳(x^۲+x+۵)$$

عبارت $x^۲+x+۵$ همواره مثبت است، پس نامعادله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$|x-۱|<۳\Rightarrow-۳<x-۱<۳\Rightarrow-۲<x<۴$$

بازه به‌دست آمده شامل اعداد صحیح $\{۳,۲,۱,۰,-۱\}$ است. (نصیری) (پایه دهم ـ نامعادله ـ نامعادله قدر مطلقی) (متوسط)

۴- گزینه «۴» ـ WM بر L در M عمود است.

$$m_{WM}=\frac{۶-۴}{۴-۳}=۲\Rightarrow M_L=-\frac{۱}{۲}$$

معادله خط L را با داشتن یک نقطه و شیب آن به‌دست می‌آوریم:

$$L: y-۶=-\frac{۱}{۲}(x-۴)\Rightarrow ۲y-۱۲=-x+۴\Rightarrow x+۲y=۱۶\xrightarrow{y=۰}x=۱۶\Rightarrow x_N=۱۶$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ جبر و معادله ـ هندسه تحلیلی) (متوسط)

۵- گزینه «۴» ـ

$$|\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}|=\frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha\beta|}=\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{|\frac{c}{a}|}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|c|}=\frac{\sqrt{۱+۱۶}}{|-۲|}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ جبر و معادله ـ روابط بین ریشه‌ها) (ساده)

۶- گزینه «۴» ـ برای آن‌که f یک تابع باشد، باید:

$$\begin{cases}۲a=b\\۳a=۷-۲b\end{cases}\Rightarrow ۳a=۷-۴a\Rightarrow a=۱,b=۲$$

$$f=\{(۱,۲),(۲,۳)\},g=\{(۱,۲),(۲,۵)\}$$

$$f+g=\{(۱,۴),(۲,۸)\},f-g=\{(۱,۰),(۲,-۲)\}$$

$$\frac{f+g}{f-g+۱}=\{(۱,\frac{۴}{۰+۱}),(۲,\frac{۸}{-۲+۱})\}=\{(۱,۴),(۲,-۸)\}$$

حاصل‌ضرب اعضای برد ۳۲- است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ اعمال دو تابع) (متوسط)

۷- گزینه «۱» ـ

$$f(x)=x+a\Rightarrow f^{-۱}(x)=x-a$$

فاصله f و $f^{-۱}$ در واقع فاصله دو خط موازی $\begin{cases}y-x=a\\y-x=-a\end{cases}$ است.

$$\frac{|a-(-a)|}{\sqrt{۱+۱}}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow|۲a|=۴\Rightarrow|a|=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ وارون تابع) (متوسط)

۸- گزینه «۴» ـ

$$[x+\frac{۱}{۴}]+[x+\frac{۹}{۴}]=۰\Rightarrow[x+\frac{۱}{۴}]+[x+\frac{۱}{۴}]=-۲\Rightarrow[x+\frac{۱}{۴}]=-۱\Rightarrow-۱\le x+\frac{۱}{۴}<۰\Rightarrow-\frac{۵}{۴}\le x<-\frac{۱}{۴}$$

$$D=\mathbb{R}-[-\frac{۵}{۴},-\frac{۱}{۴})=(-\infty,-\frac{۵}{۴})\cup[-\frac{۱}{۴},+\infty)$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ دامنه تابع) (متوسط)

۹- گزینه «۴» ـ

$$\log_m ۲ = ۳ \Rightarrow m^۳ = ۲ \Rightarrow m = \sqrt[۳]{۲}$$

$$\log_۲(۶\log_۲ m) = \log_۲(۶\log_۲ ۲^{\frac{۱}{۳}}) = \log_۲ ۲ = ۱$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ لگاریتم ـ معادله لگاریتمی) (متوسط)

۱۰- گزینه «۴» ـ اولین چهار رقمی مضرب ۷ عدد ۱۰۰۱ و آخرین آن‌ها که کوچک‌تر از ۸۰۰۰ باشد، عدد ۷۹۹۴ است، پس یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۷ داریم:

$$۱۰۰۱, ۱۰۰۸, \cdots, ۷۹۹۴ \Rightarrow n = \frac{۷۹۹۴ - ۱۰۰۱}{۷} + ۱ = ۱۰۰۰$$

$$S_{۱۰۰۰} = \frac{۱۰۰۰}{۲}(۲\times ۱۰۰۱ + ۹۹۹\times ۷) = ۴,۴۹۷,۵۰۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ دنباله ـ مجموع جملات دنباله حسابی) (دشوار)

۱۱- گزینه «۲» ـ

$$\sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-۵}{۱۳}, \tan\alpha = -\frac{۱۲}{۵}$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} = \frac{-\frac{۲۴}{۵}}{۱-\frac{۱۴۴}{۲۵}} = \frac{-۲۴\times ۵}{۲۵-۱۴۴} = \frac{۱۲۰}{۱۱۹}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۴}+۲\alpha) = \frac{۱+\tan ۲\alpha}{۱-\tan ۲\alpha} = \frac{۱+\frac{۱۲۰}{۱۱۹}}{۱-\frac{۱۲۰}{۱۱۹}} = \frac{۱۱۹+۱۲۰}{۱۱۹-۱۲۰} = -۲۳۹$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ روابط مجموع) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» ـ

$$\lim_{x\to ۳^+}(fg)(x) = \lim_{x\to ۳^+}(a[-x^۲]+۱)\times \lim_{x\to ۳^+}([\frac{-۱}{x^۲}]+۲) = (-۱۰a+۱)(-۱+۲) = -۹ \Rightarrow a = ۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = [-(۴^-)]+۱ = -۴+۱ = -۳$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ حد ـ حدبراکت‌ها) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» ـ باید مخرج یک ریشه مضاعف $x = ۲$ بدهد، پس باید مخرج به‌صورت $a(x-۲)^۲$ باشد.

$$a(x-۲)^۲ = a(x^۲ - ۴x + ۴) = ax^۲ - ۴ax + ۴a$$

با مقایسه داریم:

$$-۴a = ۳ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۴}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a+۲}{a} = ۱+\frac{۲}{a} = ۱+\frac{۲}{-\frac{۳}{۴}} = ۱-\frac{۸}{۳} = -\frac{۵}{۳}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت و مجانب قائم) (متوسط)

۱۴- گزینه «۴» ـ دامنه تابع را حساب می‌کنیم:

$$۹-x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۹ \Rightarrow -۳ < x < ۳$$

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$D_f = (-۳, ۳) \cap \{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\}$$

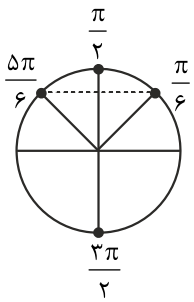
با توجه به دامنه و همسایگی‌های آن تابع دارای چهار مجانب قائم $x = ۳$، $x = -۳$، $x = \frac{\pi}{۲}$ و $x = -\frac{\pi}{۲}$ است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد و پیوستگی ـ مجانب قائم) (دشوار)

۱۵- گزینه «۴» ـ دامنه تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$۱-۲\sin x=۰ \Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

تابع $\tan x$ هم در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ تعریف نمی‌شوند، پس تابع $f(x)$ در نقاطی که روی دایره مثلثاتی زیر مشخص کرده‌ایم تعریف نمی‌شوند.



با توجه به این‌که نقاط $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۶}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ متساوی‌الفاصله نیستند، دوره تناوب تابع ۲π خواهد بود.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب) (دشوار)

۱۶- گزینه «۱» ـ

$$\tan ۵x\tan ۲x=-۱ \Rightarrow \tan ۵x=\frac{-۱}{\tan ۲x}=-\cot ۲x \Rightarrow \tan ۵x=\tan(\frac{\pi}{۲}+۲x) \Rightarrow ۵x=k\pi+\frac{\pi}{۲}+۲x$$

$$\Rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۶}(۲k+۱)$$

جواب‌ها برابر $\{\frac{\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}\}$ خواهند بود که مجموع آن‌ها $\frac{۹\pi}{۶}$ یعنی $\frac{۳\pi}{۲}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» ـ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲^{x+۳}+۳^{۲x-۱}}{۳^{۲x+۱}+۸^{x-۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳^{۲x-۱}}{۳^{۲x+۱}}=\frac{۱}{۹}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت) (متوسط)

۱۸- گزینه «۳» ـ

$$\lim_{x\to-۲}\frac{f(x)-۷}{۲(x+۲)}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \lim_{x\to-۲}\frac{f(x)-۷}{x-(-۲)}=۱ \Rightarrow \begin{cases} f(-۲)=۷ \\ f'(-۲)=۱ \end{cases}$$

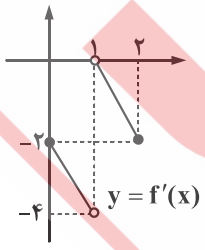
$$g(x)=x^۲f(۲x) \Rightarrow g'(x)=۲xf(۲x)+۲x^۲f'(۲x) \Rightarrow g'(-۱)=-۲f(-۲)+۲f'(-۲)=-۲\times۷+۲\times۱=-۱۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق تابع مرکب) (متوسط)

۱۹- گزینه «۱» ـ ت تابع در $x=۱$ مشتق ندارد.

$$۰\le x<۱ \Rightarrow f(x)=-x^۲-۲(x-۱)=-x^۲-۲x+۲ \Rightarrow f'(x)=-۲x-۲$$

$$۱<x\le ۲ \Rightarrow f(x)=-x^۲+۲(x-۱)=-x^۲+۲x-۲ \Rightarrow f'(x)=-۲x+۲$$



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ نمودار مشتق) (دشوار)

۲۰- گزینه «۲» ـ

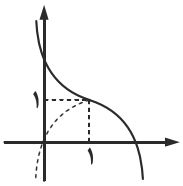
$$f'(x)=۴ax^۳-۴a=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$f(۱)=۱۰ \Rightarrow a-۴a+a^۲=۱۰ \Rightarrow a^۲-۳a-۱۰=۰$$

$$(a-۵)(a+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۵ \\ a=-۲ \end{cases} \xrightarrow{a<۰} a=-۲ \Rightarrow f(x)=-۲x^۴+۸x+۴ \Rightarrow f(۲)=-۳۲+۱۶+۴=-۱۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقطه بحرانی) (متوسط)

۲۱- گزینه «۲» ـ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که تابع نزولی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (متوسط)

۲۲- گزینه «۴» ـ مشتق دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$y = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow y' = 4ax^3 + 2bx \Rightarrow y'' = 12ax^2 + 2b = 0$$

معادله بالا درصورتی‌که $ab > 0$ فاقد ریشه حقیقی و درصورتی‌که $ab < 0$ باشد، دو ریشه ساده خواهد داشت، بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقطه عطف) (متوسط)