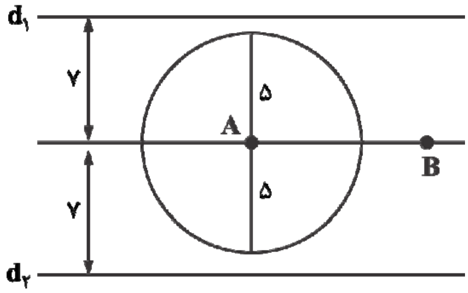
هندسه



۱- گزینه «۱» ـ مجموعه نقاطی که از رأس A به فاصله ۵ هستند دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ است. از طرف دیگر مجموعه نقاطی که از ضلع AB به فاصله ۷ هستند دو خط موازی AB و به فاصله ۷ از آن است (دو خط d_1 و d_2 در شکل). با توجه به صورت مسئله رأس C نقطه مشترک دایره با هر یک از دو خط d_1 و d_2 است. با توجه به اندازه‌های داده شده دایره با دو خط d_1 و d_2 هیچ نقطه مشترکی ندارد، بنابراین هیچ نقطه‌ای برای C با ویژگی داده شده وجود ندارد.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ مکان هندسی)

۲- گزینه «۳» ـ چون $AD \parallel BF$، بنابراین دو مثلث EBF و EDA متشابه‌اند. می‌توان نوشت:

$$\frac{EF}{EA} = \frac{BE}{DE} \quad (۱)$$

همچنین از موازی بودن AB و DG نتیجه می‌گیریم دو مثلث EAB و EGD متشابه‌اند و به‌دست می‌آید:

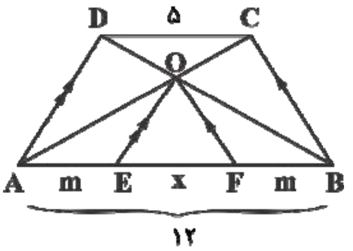
$$\frac{EG}{AE} = \frac{ED}{EB} \quad (۲)$$

از ضرب دو برابری (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{EF \times EG}{AE^۲} = ۱ \Rightarrow EF \times EG = AE^۲ \Rightarrow ۴ \times ۹ = AE^۲ = ۳۶ \Rightarrow AE = ۶$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ تشابه)

۳- گزینه «۴» ـ ابتدا ثابت می‌کنیم $AE = BF$.



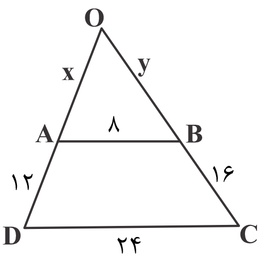
$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC : OF \parallel BC \Rightarrow \dfrac{BF}{AB} = \dfrac{OC}{AC} \\ \Delta BAD : OE \parallel AD \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{OD}{DB} \\ \Delta ODC \sim \Delta OBA \Rightarrow \dfrac{OC}{AC} = \dfrac{OD}{DB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BF}{AB} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow BF = AE$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{OD}{OB} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{m}{m+x} = \frac{۵}{۱۲} \Rightarrow \frac{m}{x} = \frac{۵}{۷} \quad (۱)$$

$$AB = ۱۲ \Rightarrow ۲m + x = ۱۲ \xrightarrow{(۱)} \frac{۱۰}{۷}x + x = ۱۲ \Rightarrow \frac{۱۷}{۷}x = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۸۴}{۱۷}$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ تالس و تشابه)



۴- گزینه «۱» ـ ابتدا دو ساق را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند.

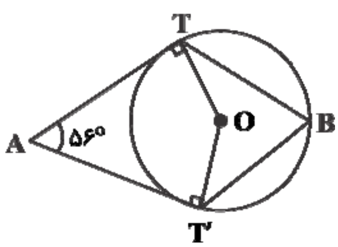
بنابر قضیه تالس:

$$\frac{x}{x+۱۲} = \frac{y}{y+۱۶} = \frac{۸}{۲۴} \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۸ \end{cases}$$

اکنون با استفاده از دستور هرون مساحت مثلث‌های OAB و OCD را به‌دست می‌آوریم و می‌نویسیم:

$$S_{ABCD} = S_{OCD} - S_{OAB} = \sqrt{۳۳ \times ۹ \times ۹ \times ۱۵} - \sqrt{۱۱ \times ۳ \times ۳ \times ۵} = ۲۷\sqrt{۵۵} - ۳\sqrt{۵۵} = ۲۴\sqrt{۱۱}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ روابط طولی)



۵- گزینه «۲» ـ از مرکز دایره به نقطه‌های T و T' وصل می‌کنیم.

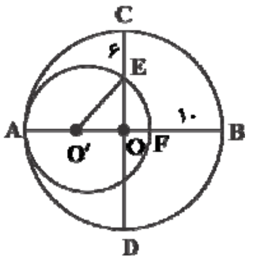
در چهارضلعی $OTAT'$، به‌دست می‌آید:

$$\hat{O} = ۱۸۰^\circ - \hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۵۶^\circ = ۱۲۴^\circ$$

در نتیجه $\overset{\frown}{TT'} = ۱۲۴$. بنابراین:

$$\hat{B} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{TT'} = ۶۲^\circ$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ زاویه‌های در دایره)



۶- گزینه «۲» ـ شعاع دایره بزرگ را R و شعاع دایره کوچک را r در نظر می‌گیریم.

$$AB = AF + FB \Rightarrow ۲r + ۱۰ = ۲R \Rightarrow R - r = ۵$$

از طرف دیگر می‌دانیم در دو دایره مماس داخل $OO' = R - r$ یعنی $OO' = ۵$،

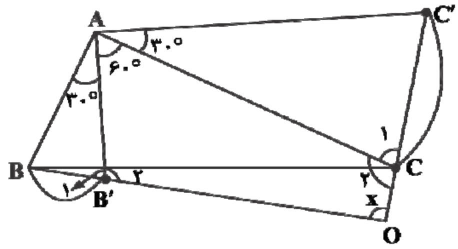
همچنین $OE = OC - CE = R - ۶$. اکنون می‌توان نوشت:

$$\Delta OO'E : O'E^۲ = OO'^۲ + OE^۲ \Rightarrow r^۲ = ۲۵ + (R-۶)^۲$$

$$\xrightarrow{R=r+۵} r^۲ = ۲۵ + (r-۱)^۲ \Rightarrow r^۲ = ۲۵ + r^۲ - ۲r + ۱ \Rightarrow r = ۱۳$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ وضع دو دایره)

۷- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که مثلث‌های ABB' و ACC' متساوی‌الساقین با زاویه رأس $۳۰°$ هستند.



پس:

$$\hat{C}_۱ = \hat{B}'_۱ = ۷۵°$$

در نتیجه:

$$\hat{B}'_۲ = \hat{C}_۲ = ۱۰۵°$$

اکنون در چهارضلعی $AB'OC$ می‌توان نوشت:

$$۶۰° + ۱۰۵° + x + ۱۰۵° = ۳۶۰° \Rightarrow x = ۹۰°$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ تبدیلات هندسی (دوران))

۸- گزینه «۱» ـ می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط موازی‌اند. بنابراین هیچ صفحه‌ای وجود ندارد که دو خط متنافر بر آن عمود باشند.

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ خط و صفحه در فضا)

۹- گزینه «۴» ـ در هر یک از سه مثلث قضیه سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{\sin\alpha}{OB} = \frac{\sin ۴۵°}{OA} \;,\; \frac{\sin\beta}{OC} = \frac{\sin ۳۰°}{OB} \;,\; \frac{\sin\gamma}{OA} = \frac{\sin ۴۵°}{OC}$$

با ضرب این سه برابری به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{OB \times OC \times OA} = \frac{\sqrt{۲}}{۲OA} \times \frac{۱}{۲OB} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲OC} \Rightarrow \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = \frac{۱}{۲}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ روابط طولی ـ قضیه سینوس‌ها)

۱۰- گزینه «۴» ـ چون P روی محور yها است، پس طول و ارتفاع آن صفر است.

$$\begin{cases} ۳a - b = ۰ \\ b + ۴a - ۷ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۳ \end{cases}$$

در نتیجه:

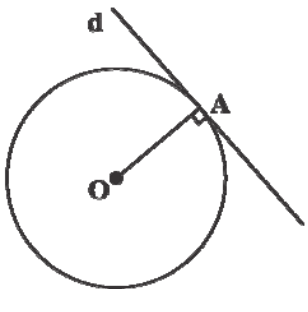
$$M = (۰, ۰, ۰)$$

(کتاب همراه علـوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ نقطه در فضا)

۱۱- گزینه «۲» ـ می‌توان نوشت:

$$A^۳ = AA^۲ = A(۲A - I) = ۲A^۲ - A = ۲(۲A - I) - A = ۳A - ۲I$$

(کتاب همراه علـوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ ضرب ماتریس)



۱۲- گزینه «۳» ـ می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

$$m_d = -\frac{۱}{m_{OA}} = -\frac{۱}{\frac{۳-۱}{۲-۱}} = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین معادله خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y - ۳ = -\frac{۱}{۲}(x - ۲)$$

در نهایت می‌توان نوشت:

محل برخورد با محورyها: $x = ۰ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow$ محل برخورد با محور yها $= \begin{vmatrix} ۰ \\ ۴ \end{vmatrix}$

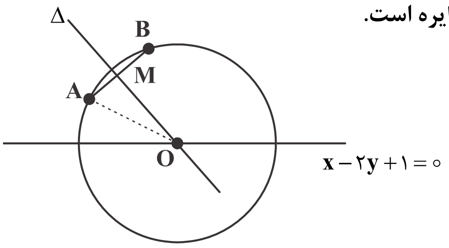
(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ دایره (مقاطع مخروطی))

۱۳- گزینه «۱» ـ می‌دانیم $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$. چون $|a|=۴$ و $|b|=۲$ مقادیر ثابتی هستند، پس ماکزیمم $|a\times b|$ زمانی رخ می‌دهد که $\sin\theta$ بیشترین مقدار باشد، پس:

$$\max(|a\times b|)=۴\times۲\times۱=۸$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ بردار ـ ضرب خارجی)

۱۴- گزینه «۲» ـ از شکل فرضی زیر استفاده می‌کنیم. معادله عمودمنصف AB را می‌نویسیم و محل برخورد آن با خط $x-۲y+۱=\circ$ را به‌دست می‌آوریم. این نقطه مرکز دایره است. فاصله مرکز دایره تا هر یک از نقطه‌های A یا B شعاع دایره است.



$$\left.\begin{array}{l} M=\dfrac{A+B}{۲}=(۱,۲) \\ m_\Delta=-\dfrac{۱}{m_{AB}}=-\dfrac{۱}{-\frac{۲}{۲}}=۱ \end{array}\right\}\Rightarrow \Delta: x-y=-۱$$

$$\begin{cases} x-y=-۱ \\ x-۲y+۱=\circ \end{cases}\Rightarrow O=\begin{vmatrix} -۱ \\ \circ \end{vmatrix}$$

$$r=OA=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱\circ}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ دایره مقاطع مخروطی)

۱۵- گزینه «۴» ـ چون $۲b=۱۶$ و $۲c=۳\circ$، پس $b=۸$ و $c=۱۵$ و در نتیجه:

$$a=\sqrt{b^۲+c^۲}=\sqrt{۸^۲+۱۵^۲}=۱۷$$

چون M و N روی بیضی است، پس:

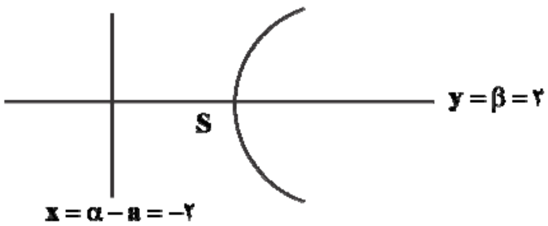
$$MF+MF'=۲a=۳۴$$
$$NF+NF'=۲a=۳۴$$

در نتیجه:

$$\text{محیط مثلث } MNF' = MF+MF'+NF+NF'=۳۴+۳۴=۶۸$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ بیضی)

۱۶- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون $\beta=۲$، پس معادله به‌صورت زیر استاندارد می‌شود:



$$(y-۲)^۲=-bx-۱۶+۴\Rightarrow(y-۲)^۲=-b(x+\frac{۱۲}{b})$$

اکنون از $\alpha-a=-۲$ به‌دست می‌آید:

$$-\frac{۱۲}{b}+\frac{b}{۴}=-۲\Rightarrow -۴۸+b^۲=-۸b\Rightarrow b^۲+۸b-۴۸=\circ\Rightarrow\begin{cases} b=-۱۲ \\ b=۴ \end{cases}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ سهمی)

۱۷- گزینه «۱» ـ از برابری $AX=A^{-۱}$ به‌دست می‌آید:

$$X=A^{-۱}\times A^{-۱}=(A^{-۱})^۲$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{\frac{۴}{۵}-۱}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & \frac{۲}{۵} \end{bmatrix}=-۵\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & \frac{۲}{۵} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱\circ & ۵ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$X=(A^{-۱})^۲=\begin{bmatrix} -۱\circ & ۵ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱\circ & ۵ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۲۵ & -۶\circ \\ -۶\circ & ۲۹ \end{bmatrix}$$

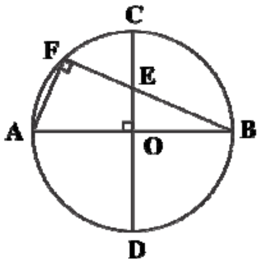
(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ وارون ماتریس ـ معادله ماتریس)

۱۸- گزینه «۲» ـ از برابری $A^۳=۲I$ نتیجه می‌گیریم:

$$|A^۳|=|۲I|\Rightarrow|A|^۳=۲^۳|I|\Rightarrow|A|^۳=۲^۳$$

بنابراین $|A|=۲$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ دترمینان)

۱۹- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. در چهارضلعی OEFA دو زاویه O و F مکمل یکدیگرند.



$$\hat{O}+\hat{F}=۹۰^\circ+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

(توجه کنید که زاویه F، زاویه محاطی مقابل به قطر است، پس $\hat{F}=۹۰^\circ$)

بنابراین چهارضلعی OEFA محاطی است. اکنون با توجه به روابط طولی در دایره محیطی چهارضلعی OEFA به‌دست می‌آید.

$$BE\times BF=BO\times BA=R\times ۲R=۲R^{۲}=۲\times ۲^{۲}=۸$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ چندضلعی محاطی ـ روابط طولی)