هندسه

۱- گزینه «۳» ـ از برابری $\hat{A}+\hat{B}=۲\hat{C}$ نتیجه می‌گیریم $\hat{C}=\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$ یعنی زاویه C، زاویه متوسط است و از $\hat{B}<\hat{C}$ می‌توان نوشت:

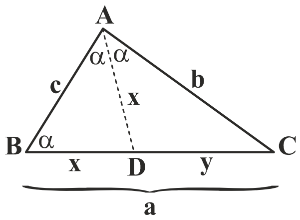
$$\hat{B}<\hat{C}<\hat{A}$$

در نتیجه:

$$b<c<a$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ نامساوی مثلثی) (متوسط)

۲- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم که در آن AD نیمساز زاویه A است. دو مثلث CAD و CBA متشابه هستند $(\widehat{CAD}=\widehat{CBA}\ ,\ \hat{C}=\hat{C})$. اکنون با نوشتن نسبت تشابه به‌دست می‌آید:



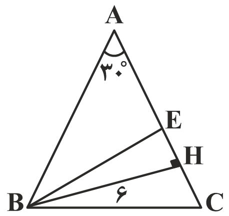
$$\frac{y}{b}=\frac{b}{a}=\frac{AD}{c}$$

دقت کنید که چون مثلث ABD متساوی‌الساقین است، پس $AD=BD=x$.

$$\frac{y}{b}=\frac{b}{a}=\frac{x}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{x+y}{b+c}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{a}{b+c}\Rightarrow a^{۲}=b^{۲}+bc\Rightarrow a^{۲}-b^{۲}=bc$$

(سراسری ـ ۸۸) (پایه دهم ـ فصل دوم: تالس و تشابه ـ تشابه) (دشوار)

۳- گزینه «۳» ـ مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه ABH، $AB=۲AH=۱۲$ از طرف دیگر برای میانه BE داریم:



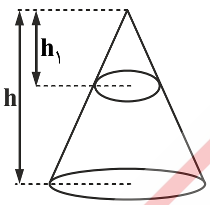
$$BH<BE<BA\ \Rightarrow\ ۶<BE<۱۲$$

از طرف دیگر چون BE و NF هر دو میانه وارد بر ساق هستند، پس نسبت آن‌ها، نسبت تشابه است، در نتیجه:

$$\frac{۶}{۶}<\frac{BE}{NF}<\frac{۱۲}{۶}\Rightarrow ۱<k<۲$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ تشابه) (دشوار)

۴- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. چون مخروط‌ها متشابه هستند، پس:



$$\frac{V_1}{V}=(\frac{h_1}{h})^{۳}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}V}{V}=(\frac{h_1}{h})^{۳}\Rightarrow\frac{h_1}{h}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{h}{h_1}=\sqrt[۳]{۲}$$

(آزاد ـ ۷۴) (پایه دهم ـ فصل چهارم: تجسم فضایی ـ حجم مخروط) (آسان)

۵- گزینه «۳» ـ می‌توان نوشت:

$$X=r_a\cdot r_b+r_b\cdot r_c+r_c\cdot r_a=\frac{S}{P-a}\cdot\frac{S}{P-b}+\frac{S}{P-b}\cdot\frac{S}{P-c}+\frac{S}{P-c}\cdot\frac{S}{P-a}=S^{۲}(\frac{P-c+P-a+P-b}{(P-a)(P-b)(P-c)})$$

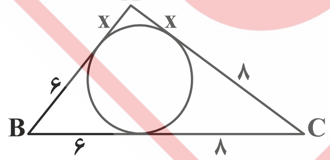
$$=S^{۲}(\frac{۳P-۲P}{(P-a)(P-b)(P-c)})=S^{۲}\times\frac{P}{(P-a)(P-b)(P-c)}$$

چون $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$، پس $(P-a)(P-b)(P-c)=\frac{S^{۲}}{P}$، در نتیجه:

$$X=S^{۲}\times\frac{P}{\frac{S^{۲}}{P}}=P^{۲}=۳^{۲}=۹$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول و چهارم ـ شعاع دوایر محاطی خارجی و رابطه هرون) (دشوار)

۶- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. توجه کنید که در نوشتن اندازه‌ها از این مطلب استفاده کردیم که طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره با هم برابرند. مساحت را به دو روش می‌نویسیم:



$$(۱)\ S=r\cdot p\ \Rightarrow\ S=۴(۱۴+x)$$

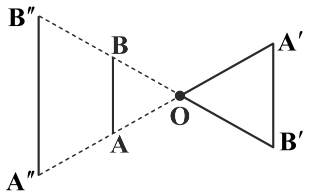
رابطه هرون (۲): $S=\sqrt{(x+۱۴)(x)(۶)(۸)}\ \Rightarrow\ S=۴\sqrt{۳x(x+۱۴)}$

با مساوی قرار دادن این دو مقدار به‌دست می‌آید $x=۷$. در نتیجه:

محیط $=۱۳+۱۴+۱۵=۴۲$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول و سوم ـ دایره محاطی مثلث، رابطه هرون) (دشوار)

۷- گزینه «۴» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر فرض $\frac{OB'}{OB}=\frac{۱}{۳}$. اکنون می‌توان نوشت:



$$k=\frac{OB''}{OB}=\frac{OB+BB''}{OB}=\frac{OB+BB'}{OB}=\frac{OB+OB+OB'}{OB}=۲+\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

در نتیجه:

$$\frac{A''B''}{A'B'}=\frac{\frac{A''B''}{AB}}{\frac{A'B'}{AB}}=\frac{\frac{۷}{۳}}{\frac{۱}{۳}}=۷$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ تجانس) (متوسط)

۸- گزینه «۱» ـ معادله نیمساز ناحیه اول به فرم $y=x$ است. چون مرکز دایره روی این خط پس مختصات آن به فرم $O(\alpha,\alpha)$ است. فاصله O از A و خط $y=۲x$ یکسان است. اکنون می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(\alpha-۶)^۲+(\alpha-۳)^۲}=\frac{|۲\alpha-\alpha|}{\sqrt{۵}}$$

با حل معادله به‌دست می‌آید $\alpha=۵$؛ یعنی مرکز دایره $O(۵,۵)$ است و شعاع دایره به‌دست می‌آید:

$$R=OA=\sqrt{(۶-۵)^۲+(۳-۵)^۲}=\sqrt{۵}$$

(سراسری ـ ۹۲) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ دایره، خط مماس) (دشوار)

۹- گزینه «۱» ـ چون مثلث OBF قائم‌الزاویه است، پس $\alpha+\beta=۹۰^\circ$. اکنون به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}۲\alpha+۳\beta=۲۴۰^\circ\\ \alpha+\beta=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۳۰^\circ\\ \beta=۶۰^\circ\end{cases}$$

می‌توان نوشت:

$$\sin\alpha=\frac{OF}{BF}=\frac{c}{a}=e\Rightarrow e=\frac{۱}{۲}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ بیضی) (آسان)

۱۰- گزینه «۱» ـ چون اولین دستگاه داده شده دو خط منطبق است، پس بی‌شمار جواب دارد، در نتیجه:

$$\frac{۳}{m-۱}=\frac{m-۳}{۱}=\frac{۲(۳-m)}{m-۲}$$

به‌دست می‌آید $m=۰$. با قرار دادن $m=۰$ در دستگاه دوم به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}-۲x+۵y=۴\\ ۴x+y=۸\end{cases}$$

این دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ دستگاه معادلات) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» ـ روش تشریحی برای حل این سؤال طولانی است و بهتر است با عددگذاری مسئله را حل کنیم. فرض کنید:

$$x=y=۰,z=n$$

در نتیجه:

$$\begin{vmatrix}n & ۰ & ۰\\ ۰ & n & ۰\\ n & n & ۲n\end{vmatrix}=۵۴\Rightarrow ۲n^۳=۵۴\Rightarrow n^۳=۲۷\Rightarrow n=۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ دترمینان) (دشوار)

۱۲- گزینه «۱» ـ فرض کنید $a=(x,y,z)$ و $b=(۶,-۲,۳)$، در این صورت:

$$a\cdot b=۶x-۲t+۳z,|b|=\sqrt{۳۶+۴+۹}=۷$$

اکنون بنابر نابرابری کوشی ـ شوارتز نتیجه می‌گیریم:

$$|a\cdot b|^۲\le|a|^۲|b|^۲\Rightarrow ۴۹\le|a|^۲\times۴۹\Rightarrow ۱\le|a|^۲\Rightarrow ۱\le x^۲+y^۲+z^۲$$

یعنی کم‌ترین مقدار عبارت $x^۲+y^۲+z^۲$ برابر ۱ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ نامساوی کوشی ـ شوارتز) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» ـ دو طرف برابری داده شده را در $\mathbf{a}$ ضرب داخلی می‌کنیم:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+2\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

$$|\mathbf{a}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$$

اکنون اگر زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را θ فرض کنیم و با توجه به این مطلب که $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$ به‌دست می‌آید:

$$1+2\cos\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ ضرب داخلی و خارجی) (آسان)

۱۴- گزینه «۴» ـ چون $\mathbf{a}=(1,m,-1)$ و $\mathbf{b}=(2,1,2)$، پس:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(2m+1,-4,-2m+1)$$

در نتیجه:

$$S=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{(2m+1)^2+16+(-2m+1)^2}=\sqrt{8m^2+18}$$

می‌توان نوشت:

$$\sqrt{8m^2+18}=5\sqrt{2} \Rightarrow 8m^2+18=50 \Rightarrow m=\pm 2$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ ضرب خارجی بردارها و کاربرد آن) (آسان)