گسسته

۱- گزینه «۳» ـ برای اینکه این دو مجموعه با هم برابر باشند، دو اتفاق ممکن است رُخ دهد:

$$\begin{cases} x+1=5 \\ 4=y+2 \\ -2=z \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x+1=5 \\ 4=z \\ -2=y+2 \end{cases}$$

یعنی: $x=4 \text{ ، } y=-4 \text{ ، } z=4$

یا: $x=4 \text{ ، } y=2 \text{ ، } z=-2$

به‌دست می‌آید $x+y+z=4$. چون در هر دو صورت یک مقدار برای $x+y+z$ به‌دست آمد پس می‌توان گفت:

$$\underset{\text{بیشترین مقدار}}{x+y+z} = \underset{\text{کمترین مقدار}}{x+y+z} = 4$$

(سراسری با تغییر) (آمار و احتمال ـ فصل اول ـ تساوی مجموعه‌ها)

۲- گزینه «۳» ـ فرض کنید تعداد اعضای $A\cap B$ برابر n باشد، دراین‌صورت مجموعه $A\cap B$ دارای 2^n زیرمجموعه است. پس $64=2^n$، در نتیجه $n=6$.

چون:

$$(B\cup A')'=B'\cap A=A-B$$

پس باید تعداد عضوهای $A-B$ را به‌دست آوریم:

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=10-6=4$$

پس مجموعه $(B\cup A')'$ دارای ۴ عضو، در نتیجه دارای $2^4=16$ زیرمجموعه است.

(سراسری با تغییر) (آمار و احتمال ـ فصل اول ـ دروس دوم و سوم ـ زیرمجموعه‌ها و اعمال روی مجموعه‌ها)

۳- گزینه «۴» ـ پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

B_1: پیشامد تعلق مهره انتخابی به جعبه اول

B_2: پیشامد تعلق مهره انتخابی به جعبه دوم

A: پیشامد آبی بودن مهره انتخابی

به‌دست می‌آید:

$$P(B_1)=\frac{3}{5}$$

$$P(B_2)=\frac{2}{5}$$

$$P(A\mid B_1)=\frac{4}{9}$$

$$P(A\mid B_2)=\frac{4}{7}$$

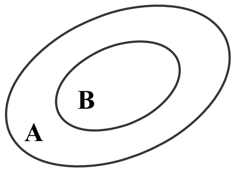
طبق فرمول احتمال کل:

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{45}+\frac{8}{35}=\frac{28+24}{105}=\frac{52}{105}$$

(سراسری با تغییر) (آمار و احتمال ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ قانون احتمال کل ـ احتمال شرطی)

۴- گزینه «۲» ــ می‌دانیم $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ و بنابر فرض مسئله $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

در نتیجه:



$$P(B)=P(A\cap B)$$

یعنی $A\cap B=B$ بنابراین $B\subseteq A$.

اکنون نتیجه می‌گیریم:

$$P(B)\le P(A)$$

(سراسری با تغییر) (آمار و احتمال ــ فصل دوم ــ درس دوم ــ قوانین احتمال)

۵- گزینه «۲» ــ میانگین وزنی این داده‌ها را با $\bar{x}_w$ نشان می‌دهیم. بنابر فرمول می‌دانیم:

$$\bar{x}_w=\frac{w_۱x_۱+w_۲x_۲+\cdots+w_nx_n}{w_۱+w_۲+\cdots+w_n}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$\bar{x}_w=\frac{۴\times۶۳+۳\times۹۸+۱\times۶۷+۱\times۳۴+۴\times۸۰+۳\times۶۷}{۴+۳+۱+۱+۴+۳}=\frac{۲۵۲+۲۹۴+۶۷+۳۴+۳۲۰+۲۰۱}{۱۶}=\frac{۱۱۶۸}{۱۶}=۷۳$$

(سراسری با تغییر) (آمار و احتمال ــ فصل سوم ــ درس دوم ــ معیارهای گرایش به مرکز ــ میانگین وزنی)

۶- گزینه «۱» ــ (۱) ابتدا داده‌ها را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

۲۱، ۲۰، ۱۸، ۱۷، ۱۷، ۱۶، ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹، ۷

(۲) چون ۱۳ داده داریم میانه داده هفتم، چارک اول میانگین داده‌های سوم و چهارم و چارک سوم میانگین داده‌های دهم و یازدهم است. یعنی:

$$Q_۱=\frac{x_۳+x_۴}{۲}=\frac{۱۰+۱۱}{۲}=۱۰/۵$$

$$Q_۲=x_۷=۱۳$$

$$Q_۳=\frac{x_{۱۰}+x_{۱۱}}{۲}=\frac{۱۷+۱۸}{۲}=۱۷/۵$$

(۳) اکنون به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲(Q_۳-Q_۱)}{Q_۲+۱}=\frac{۲(۱۷/۵-۱۰/۵)}{۱۳+۱}=\frac{۱۴}{۱۴}=۱$$

(سراسری با تغییر) (آمار و احتمال ــ فصل سوم ــ درس سوم ــ معیارهای پراکندگی ــ نمودار جعبه ای ــ میانه)

۷- گزینه «۲» ــ رقم‌های داده شده شامل سه رقم زوج و چهار رقم خود است:

۶ و ۴ و ۲: رقم‌های زوج

۷ و ۵ و ۳ و ۱: رقم‌های فرد

برای اینکه ارقام یک در میان باشند جایگشت را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم، که در آن دایره‌ها نشان‌دهنده جایگاه ارقام زوج و مثلث‌ها نشان‌دهنده جایگاه ارقام فرد هستند.

سه رقم زوج به !۳ می‌توانند در ۳ مکان مشخص شده (دایره‌ها) و چهار رقم فرد به !۴ می‌توانند در ۴ مکان مشخص شده (مثلث‌ها) قرار گیرند. بنابراین تعداد جایگشت‌های مورد نظر برابر $۱۴۴=!۴\times!۳$ است.

(سراسری با تغییر) (ریاضیات گسسته ــ فصل سوم ــ درس اول ــ برگرفته از مثال ۵ صفحه ۵۷)

۸- گزینه «۳» ــ گراف کامل از مرتبه ۱۰ دارای $۴۵=\binom{۱۰}{۲}$ یال است. پس گراف داده شده در این مسئله درواقع گراف کامل $k_{۱۰}$ بوده که یک یال آن را حذف کرده‌ایم. پس در این گراف ۸ رأس درجه ۹ و ۲ رأس درجه ۸ هستند. بنابراین تعداد رأس‌های درجه Δ برابر ۸ است.

(سراسری با تغییر) (ریاضیات گسسته ــ فصل دوم ــ درس اول)

۹- گزینه «۲» ـ می‌توان نوشت:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$
$$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$$
$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$$
$$\equiv \sim (p \wedge q) \vee r$$
$$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

(سراسری با تغییر) (آمار و احتمال ـ فصل اول ـ درس اول ـ جبر گزاره‌ها ـ منطق ریاضی)

۱۰- گزینه «۴» ـ بررسی گزینه‌ها:

گزینه«۱»: اگر فرض کنیم $x = 0$ در این صورت هیچ y ای پیدا نمی‌شود که به ازای آن $xy > 1$. پس این گزاره نادرست است.

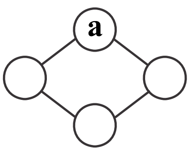
گزینه «۲»: این گزاره درست نیست. برای هر عدد صحیح مانند x به ازای $y = 0$ رابطه $y^x = 1$ درست نیست. ($(0)^0$ تعریف‌نشده است)

گزینه «۳»: مشابه گزینه «۱»، برای هر عدد حقیقی x به ازای $y = 0$ رابطه $xy = 1$ درست نیست. پس این گزاره هم نادرست است.

گزینه «۴»: چون $x \neq 0$ پس به ازای هر عدد حقیقی x، اگر $y = \frac{2}{x}$ فرض شود $xy = 2$. پس این گزاره درست است.

(سراسری با تغییر) (آمار و احتمال ـ فصل اول ـ درس اول ـ گزاره‌های سوری)

۱۱- گزینه «۱» ـ برای دور به طول ۴ گراف K_7 ابتدا ۴ رأس را از ۷ رأس انتخاب می‌کنیم (این عمل به $35 = \binom{7}{4}$ طریق قابل انجام است).

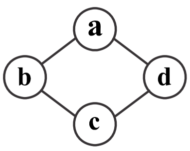


یکی از رأس‌ها مانند a را در دورِ موردنظر قرار می‌دهیم.

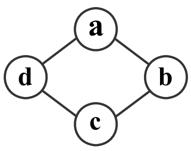
۳ رأس باقی‌مانده را به $3!$ در مکان‌های خالی قرار می‌دهیم.

اما توجه کنیدکه در این حالت‌ها هر دور دو بار حساب شده است.

مثلاً دورهای:



و



دو بار حساب شده. پس حالت‌های قرار گرفتن این رأس‌ها می‌شود $\frac{3!}{2}$. در نهایت به‌دست می‌آید:

$$K_7 \text{ تعداد دورهای به طول ۴ در گراف } = \binom{7}{4} \times \frac{3!}{2} = 35 \times 3 = 105$$

(سراسری با تغییر) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ دور در گراف)

۱۲- گزینه «۳» ـ گزینه «۳» اصلاً احاطه‌گر نیست. چون رأس c احاطه نمی‌شود. (سراسری با تغییر) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ احاطه‌گر مینیمال)