ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۱» ـ

$$[A\cap(A'\cap B')']\cap[(B'\cup C')-C]=[\underbrace{A\cap(A\cup B)}_{\text{جذب}}]\cap[(B'\cup C')\cap C']=A\cap C'=A-C$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ جبر مجموعه‌ها)

۲- گزینه «۴» ـ چون $A\times B\subseteq B\times A$ پس $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$. در نتیجه $A=B$. اکنون به‌دست می‌آید:

$$(A'-B)\cup(B-A')=(A'-A)\cup(A-A')=A'\cup A=U$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ ضرب دکارتی)

۳- گزینه «۱» ـ می‌توان نوشت:

$$(\sim p\Rightarrow q)\wedge(\sim p\Rightarrow\sim q)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee\sim q)\equiv p\vee(q\wedge\sim q)\equiv p\vee F\equiv p$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ منطق ریاضی)

۴- گزینه «۲» ـ اگر ۵۴ شاخه گل را کبوتر، گلدان‌ها را لانه فرض کنیم بنابر تعمیم اصلی لانه کبوتری $k+1=5$. اکنون می‌توان نوشت:

$$m>nk\Rightarrow 54>4k\Rightarrow 13\ge k$$

یعنی حداکثر تعداد گلدان‌ها برابر ۱۳ است. (کتاب همراه علـوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ تعمیم اصل لانه کبوتری)

۵- گزینه «۳» ـ تعداد کل اعداد چهار رقمی برابر است با:

$$9\times10\times10\times10$$

و تعداد اعداد چهار رقمی که رقم تکراری ندارند برابر است با:

$$9\times9\times8\times7$$

پس در $9\times10\times10\times10-9\times9\times8\times7=9\times8(125-63)=4464$ عدد چهار رقمی رقم تکراری وجود دارد.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ ترکیبات)

۶- گزینه «۳» ـ از نامعادله داده شده نتیجه می‌گیریم $5\le x_1+x_2+x_3\le 6$ پس $x_1+x_2+x_3=5$ یا $x_1+x_2+x_3=6$. تعداد جواب‌های طبیعی این دو معادله به‌ترتیب برابر $\binom{4}{2}$ و $\binom{5}{2}$ است، بنابراین تعداد جواب‌های نامعادله داده شده در مجموعه اعداد طبیعی برابر $\binom{5}{2}+\binom{4}{2}=10+6=16$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ معادله سیاله خطی با ضرایب واحد)

۷- گزینه «۳» ـ تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد توابع پوشا از مجموعه ۶ عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B. می‌دانیم:

تعداد توابع پوشا از یک مجموعه m عضوی به ۳ عضوی $=3^m-(3\times2^m-3)$

بنابراین پاسخ برابر است با:

$$3^6-(3\times2^6-3)=540$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ اصل شمول و عدم شمول)

۸- گزینه «۲» ـ می‌توان نوشت:

$$P(B\mid A)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

در نتیجه:

$$P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

(کتاب همراه علـوی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ احتمال شرطی)

۹- گزینه «۱» ـ می‌توان نوشت:

$$\sigma^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-(\bar{x})^2=\frac{2000}{5}-16^2=400-256=144$$

بنابراین $\sigma=12$. (کتاب همراه علـوی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ معیارهای پراکندگی)

۱۰- گزینه «۳» ـ با بسط دادن عدد داده شده به‌دست می‌آید:

$$\overline{ababab} = ۱۰^۴\overline{ab} + ۱۰^۲\overline{ab} + ab = ۱۰۱۰۱\overline{ab} = ۳ \times ۷ \times ۱۳ \times ۳۷(\overline{ab})$$

(کتاب همراه علـوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ کاربرد هم‌نهشتی)

۱۱- گزینه «۲» ـ فرض کنید A این پیشامد باشد که رنگ زرد دیده شود و B این پیشامد باشد که دو روی کارت زرد باشد. بایـد $P(A)$ را حسـاب کنیم. توجه کنید که:

$$P(B) = \frac{۳}{۶+۳} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow P(B') = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$P(A \mid B) = ۱ \qquad\qquad P(A \mid B') = \frac{۱}{۲}$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(B')P(A \mid B') = \frac{۱}{۳} \times ۱ + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۳}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ قانون احتمال کل)

۱۲- گزینه «۴» ـ به‌دست می‌آید:

$$\underbrace{\binom{۴}{۱} \times (\frac{۱}{۲})^۴}_{\text{یکی از چهـار فرزنـد اول پسر اسـت}} \times \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{فرزنـد پنجـم پسـر اسـت}} = \frac{۴}{۳۲} = \frac{۱}{۸}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ ضرب دکارتی)

۱۳- گزینه «۱» ـ عددهای مورد نظر را a و خارج‌قسمت را q در نظر می‌گیریم. بنابراین الگوریتم تقسیم:

$$a = ۴۳۰q + q^۲ \quad , \quad q = ۱, ۲, ۳, \dots, ۲۰$$

چون $a \overset{۱۱}{\equiv} ۰$ پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۴۳۰q + q^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \\ ۴۳۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow q + q^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۱ \mid q(q+۱) \Rightarrow \begin{cases} q \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow q = ۱ \\ q \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow q = ۱۰ \end{cases}$$

بنابراین به‌ازای ۲ عدد طبیعی این ویژگی برقرار است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ الگوریتم تقسیم ـ هم‌نهشتی)

۱۴- گزینه «۴» ـ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} d \mid ۲a^۲ + a - ۱ \\ d \mid a + ۳ \Rightarrow d \mid ۲a^۲ + ۶a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid ۵a + ۱ \\ d \mid a + ۳ \end{cases} \Rightarrow d \mid ۵(a+۳) - (۵a+۱) \Rightarrow d \mid ۱۴$$

در نتیجه:

$$d \in \{۱, ۲, ۷, ۱۴\}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ ب.م.م)

۱۵- گزینه «۳» ـ می‌توان نوشت:

$$۳۱ \mid ۲^n - ۱ \Rightarrow ۲^۵ - ۱ \mid ۲^n - ۱$$

این رابطه زمانی برقرار است که $۵ \mid n$ در نتیجه $n = ۵k$. چون n عددی دو رقمی است. پس:

$$۱۰ \le ۵k \le ۹۹ \Rightarrow ۲ \le k \le ۱۹$$

پس ۱۸ عدد با این شرایط وجود دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ بخش‌پذیری)

۱۶- گزینه «۱» ـ عدد m به‌صورت $\overline{۴(\overline{aa})aa}$ است. با بسط دادن این عدد می‌توان نوشت:

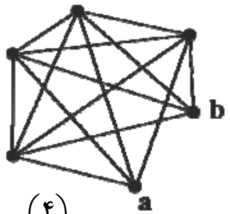
$$m = ۱۰۰(۴(۱۰a + a)) + (۱۰a + a) = ۴۰۱ \times ۱۱ \times a$$

بنابراین $m \overset{۴۰۱}{\equiv} ۰$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ کاربرد هم‌نهشتی)

۱۷- گزینه «۴» ـ این گراف یک گراف کامل k_6 است که یک یال آن را حذف کرده‌ایم.

تعداد دورهای به‌طول ۴ در گراف k_6 برابر است با:

$$\binom{۶}{۴} \times \frac{۳!}{۲} = ۴۵$$



با حذف یال ab تعداد دورهای به‌طول ۴ که حذف شده‌اند برابر است با:

$$۲ \times \binom{۴}{۲} = ۱۲$$

بنابراین این پاسخ برابر است با:

$$۴۵ - ۱۲ = ۳۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ دور در گراف)

۱۸- گزینه «۳» ـ در هر یک از مربع‌ها سه مجموعه احاطه‌گر مینیمال وجود دارد پس تعداد جواب‌ها برابر است با:

چهارضلعی پائین		چهارضلعی بالا سمت راست		چهارضلعی بالا سمت چپ	
{b , d} یا {a} یا {c}		{h , f} یا {g} یا {e}		{l , j} یا {k} یا {i}	
۳	×	۳	×	۳	= ۲۷

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ احاطه‌گر مینیمال)

۱۹- گزینه «۲» ـ ابتدا تعداد یال‌های گراف G را به‌دست می‌آوریم

$$q_{(G)} = \frac{۱+۲+۲+۳+۳+۵+۵+۵}{۲} = ۱۳$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$q_{(G)} + q_{(\bar{a})} = \binom{P}{۲} \Rightarrow ۱۳ + q_{(\bar{a})} = ۲۸ \Rightarrow q(\bar{a}) = ۲۸ - ۱۳ = ۱۵$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ مکمل گراف)