

ریاضیات گسسته

۱-گزینه «۲» - حتماً دو مجموعه A و B با هم برابر هستند.

$$\begin{cases} x + \delta = 4 \Rightarrow x = -1 \\ y - 1 = 8 \Rightarrow y = 9 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x + \delta = 8 \Rightarrow x = 3 \\ y - 1 = 4 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

بنابراین (x, y) به یکی از دو صورت (-1, 9) یا (3, 5) است.

$$\begin{cases} z = 7 \\ t + 2 = 3 \Rightarrow t = 1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} z = 3 \\ t + 2 = 7 \Rightarrow t = 5 \end{cases}$$

بنابراین (z, t) هم به صورت (7, 1) و (3, 5) است که چون (3, 5) در هر دو مشترک است، حذف می‌شود پس مجموعه $\{(m, y), (z, t)\}$ را می‌توان به 4 صورت زیر نوشت:

$$\{(-1, 9), (7, 1)\} - \{(-1, 9), (3, 5)\} - \{(3, 5), (7, 1)\} - \{(3, 5)\}$$

(فرهمندیور) (پایه یازدهم - فصل اول - درس سوم - ضرب دکارتی - صفحه 35) (متوسط)

۲-گزینه «۳» -

$$\frac{1}{3}A \Rightarrow \text{حداقل یکی سیاه} = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}B \Rightarrow \text{حداقل یکی سیاه} = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{2 \times 2 + 1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{3}C \Rightarrow \text{حداقل یکی سیاه} = 1$$

$$P(X = \text{حداقل یک مهره سیاه}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2 + 5 + 6}{18} = \frac{13}{18} = \frac{7}{9}$$

(فرهمندیور) (پایه یازدهم - فصل اول - درس سوم - قاعده بیس - صفحه 60) (متوسط)

۳-گزینه «۱» -

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0/2 = \frac{P(A \cap B)}{0/4} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/08$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0/5 - 0/08 = 0/42$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{0/42}{1 - 0/4} = \frac{42}{60} = 0/7$$

(فرهمندیور) (پایه یازدهم - فصل اول - درس سوم - احتمال شرطی - صفحه 54) (متوسط)

۴-گزینه «۳» - داده‌ها را به صورت جدول می‌نویسیم.

x_i	4	8	12	16	21	جمع
f_i	12	6	20	12	10	$n = 60$
$f_i x_i$	48	48	240	192	210	738

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n} = \frac{738}{60} = 12/3$$

(فرهمندیور) (پایه یازدهم - فصل اول - درس سوم - میانگین - صفحه 85) (متوسط)

۵-گزینه «۴» - می‌دانیم باقیمانده تقسیم هر عدد فرد به توان زوج بر عدد 1 است.

$$\begin{cases} 53^{12} \equiv 1 \\ 49^8 \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow 53^{12} + 49^8 \equiv 2 \equiv -6 \pmod{1}$$

$$\begin{cases} 53^6 \equiv 1 \\ 49^4 \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow 53^{12} + 49^8 \equiv 1 + 1 \equiv -6 \pmod{2}$$

$$(1), (2) \Rightarrow 53^{12} + 49^8 \equiv -6 \pmod{56} \Rightarrow 53^{12} + 49^8 \equiv 50 \pmod{56}$$

(فرهمندیور) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - همنهشتی - صفحات 18 تا 21) (متوسط)

۶-گزینه «۲» -

$$\begin{cases} 10y \equiv 185 \Rightarrow y \equiv 5 \pmod{9} \\ 9x + 10(9k + 5) = 185 \Rightarrow 9x = -90k + 135 \Rightarrow x = -10k + 15 \\ x > 0 \Rightarrow -10k + 15 > 0 \Rightarrow k < 1/5 \\ y > 0 \Rightarrow 9k + 5 > 0 \Rightarrow k > -5/9 \end{cases} \Rightarrow k \in \{0, 1\}$$

بنابراین معادله فوق 2 جواب دارد.

(فرهمندیور) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - معادله سیاله - صفحه 26) (متوسط)

۷-گزینه «۱» -

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod{7} \\ a \equiv 19 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 19 \pmod{91} \\ a \equiv 19 \pmod{13} \end{cases}$$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - تقسیم - صفحه 16) (آسان)

۸-گزینه «۳» - در گراف کامل $\Delta = \delta = p - 1$ و $q = \frac{p(p-1)}{2}$ است.

$$\frac{p(p-1)}{2} = (p-1)^2 - (p-1) - p - 2 \Rightarrow p^2 - p = 2p^2 - 8p$$

$$\Rightarrow p^2 - 7p = 0 \Rightarrow p(p-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = 7 \end{cases}$$

در گراف k_p تعداد دورها به طول m برابر $\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$ است.

$$\binom{7}{5} \times \frac{4!}{2} = 21 \times 12 = 252$$

(فرهمندیور) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول - گراف کامل - صفحه 38) (متوسط)

۹-گزینه «۲» - در این گراف $n = 10$ و $\Delta = 4$ است.

$$\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor \Rightarrow \gamma(G) \geq 2$$

$$\text{مجموعه } -\gamma: \{i, j, g\} \Rightarrow \gamma(G) = 3$$

(فرهمندیور) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - عدد احاطه‌گری - صفحه 49) (آسان)

۱۰-گزینه «۴» - عدد چهار رقمی مورد نظر حتماً به صورت $\overline{1xyz}$ است که:

$$x + y + z = 8, n = 8, k = 3$$

$$\text{تعداد جوابها} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10}{2} = 45$$

(فرهمندیور) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - توزیع n شی یکسان - صفحه 60) (متوسط)

۱۱-گزینه «۲» - مجموعه را به صورت زیر افراز می‌کنیم.

$$A_1 = \{3\}, A_2 = \{7\}, A_3 = \{11, 15\}, A_4 = \{15, 19\}$$

$$\dots, A_{10} = \{39, 47\}, A_{11} = \{43\}$$

اگر 12 عضو از مجموعه اصلی انتخاب کنیم حتماً دو عضو از یکی از مجموعه‌های فوق حضور دارند که مجموع آنها 86 است.

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - لانه کیوتری - صفحه 85) (متوسط)