ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۲» ــ ابتدا توجه کنید که X تعداد زیرمجموعه‌هایی از A است که شامل اعضای $A\cap B$ است.

$$A\cap B=\{۲,۴,۶\}\ \Rightarrow\ n(A\cap B)=۳$$
$$n(A)=۶$$

بنابراین مقادیر مجموعه‌های مطلوب برابر است با:

$$۲^{n(A)-n(A\cap B)}=۲^{۶-۳}=۲^{۳}=۸$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ زیرمجموعه‌ها) (متوسط)

۲- گزینه «۲» ــ چون $A\subseteq B$، پس $|A|\leq|B|$. همچنین:

$$|A\times B|=۱۲\ \Rightarrow\ |A|\times|B|=۱۲$$
$$|A\times C|=۱۸\ \Rightarrow\ |A|\times|C|=۱۸$$

اکنون مقادیر مورد قبول برای تعداد اعضای مجموعه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$|A|\times|B|=۱۲\ \Rightarrow\ \begin{cases}|A|=۱,|B|=۱۲,|C|=۱۸\\|A|=۲,|B|=۶,|C|=۹\\|A|=۳,|B|=۴,|C|=۶\end{cases}$$

بنابراین مجموعه $B\times C$، حداقل $۴\times۶=۲۴$ عضو دارد. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ ضرب دکارتی) (دشوار)

۳- گزینه «۲» ــ به‌دست می‌آید:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$
$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

در نتیجه:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۵}-\frac{۱۴}{۱۵}=\frac{۸}{۱۵}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۵}-۲\times\frac{۸}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه یازدهم ــ فصل دوم ــ مبانی احتمال) (متوسط)

۴- گزینه «۲» ــ فرض کنید $P(a)=x$، در این صورت:

$$P(b)=x+\frac{۱}{۱۲}\ ,\ P(c)=x+\frac{۲}{۱۲}\ ,\ P(d)=x+\frac{۳}{۱۲}$$

از طرف دیگر:

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱\ \Rightarrow\ x+x+\frac{۱}{۱۲}+x+\frac{۲}{۱۲}+x+\frac{۳}{۱۲}=۱\ \Rightarrow\ x=\frac{۱}{۸}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه یازدهم ــ فصل دوم ــ احتمال در فضای غیرهم‌شانس) (آسان)

۵- گزینه «۴» ــ احتمال این‌که مضرب ۳ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}$ و ظاهر نشدن مضرب ۳ برابر $\frac{۲}{۳}$ است. احتمال مطلوب را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

در پرتاب اول مضرب ۳ + در پرتاب دوم مضرب ۳ + در پرتاب سوم مضرب ۳ $=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱۹}{۲۷}$

(سراسری ــ ۹۵) (پایه یازدهم ــ فصل دوم ــ پیشامدهای مستقل) (آسان)

۶- گزینه «۲» ــ داده‌ها را به‌ترتیب صعودی به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x_۱ , x_۲ , \cdots , x_{۲۳}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} Q_۲ = a_{۱۲} \\ Q_۱ = a_۶ \\ Q_۳ = a_{۱۸} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{i=۱}^{۵} x_i}{۵} = ۲۱/۶ \\ \dfrac{\sum\limits_{i=۶}^{۱۸} x_i}{۱۳} = ۲۵ \\ \dfrac{\sum\limits_{i=۱۹}^{۲۳} x_i}{۵} = ۳۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=۱}^{۵} x_i = ۱۰۸ \\ \sum\limits_{i=۶}^{۱۸} x_i = ۳۲۵ \\ \sum\limits_{i=۱۹}^{۲۳} x_i = ۱۶۵ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\overline{x} = \frac{۱۰۸ + ۳۲۵ + ۱۶۵}{۲۳} = ۲۶$$

(سراسری ــ ۹۵) (پایه یازدهم ــ فصل سوم ــ شاخص پراکندگی، نمودار جعبه‌ای) (دشوار)

۷- گزینه «۲» ــ با داشتن بازه اطمینان به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \overline{x} - \dfrac{۲\sigma}{\sqrt{n}} = ۴۳/۷ \\ \overline{x} + \dfrac{۲\sigma}{\sqrt{n}} = ۴۸/۳ \end{cases} \xrightarrow{n=۱۰۰} \begin{cases} \overline{x} = ۴۶ \\ \sigma = \dfrac{۲۳}{۲} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{\frac{۲۳}{۲}}{۴۶} = \frac{۱}{۴}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه یازدهم ــ فصل چهارم ــ برآورد) (متوسط)

۸- گزینه «۳» ــ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۹n + m + ۴ \mid ۵m + n \Rightarrow ۹n + m + ۴ \le ۵m + n \Rightarrow ۲n + ۱ \le m \\ ۳m + ۲ \mid ۲n + m + ۶ \Rightarrow ۳m + ۲ \le ۲n + m + ۶ \Rightarrow m \le n + ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲n + ۱ \le n + ۲ \Rightarrow n \le ۱ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = ۱$$

لذا $۳ \le m \le ۳$ ، یعنی $m = ۳$، در نتیجه $m + n = ۴$. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ بخش‌پذیری) (دشوار)

۹- گزینه «۲» ــ بنابر الگوریتم تقسیم و صورت سؤال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ a + ۱ = (b + ۲)q + r - ۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} ۱ = ۲q - ۵ \Rightarrow q = ۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ الگوریتم تقسیم) (آسان)

۱۰- گزینه «۲» ــ چون $۳ \times ۱۱ = ۳۳$ و $(۳ , ۱۱) = ۱$، باقی‌مانده تقسیم $a = (-۳۹)^{۲۳}$ را بر ۳ و ۱۱ به‌دست می‌آوریم. چون ۳۹- بر ۳ بخش‌پذیر است، پس:

$$a \overset{۳}{\equiv} ۰ \quad (۱)$$

برای باقی‌مانده بر ۱۱ به‌دست می‌آید.

$$-۳۹ \overset{۱۱}{\equiv} -(۹-۳) \overset{۱۱}{\equiv} -۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۵^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۲۵ - ۲۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵^۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۹ - ۱۱ \overset{۱۱}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\times ۵} ۵^۵ \overset{۱۱}{\equiv} -۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۱$$

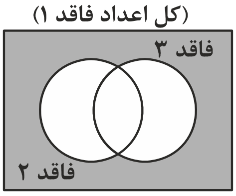
$$\Rightarrow (-۳۹)^۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ((-۳۹)^۵)^۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow \left.\begin{matrix} (-۳۹)^{۲۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \\ (-۳۹)^۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۵^۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\times} a \overset{۱۱}{\equiv} (-۳۹)^{۲۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $a \overset{۱۱}{\equiv} ۱۵$ و $a \overset{۳}{\equiv} ۱۵$، پس $a \overset{۳۳}{\equiv} ۱۵$. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ پیدا کردن باقی‌مانده) (دشوار)

۱۱- گزینه «۲» ــ مجموعه یال‌های E باید حداقل شامل یال‌های ab و bc باشد و حداکثر نیز می‌تواند به غیر از این دو یال دارای دو یال دیگر cd و ad نیز باشد، بنابراین حالت‌های مختلف E حالت‌هایی است که دو یال cd و ad هریک در E باشند یا نباشند که در مجموع $۲^۲ = ۴$ حالت می‌شود؛ یعنی با این شرایط ۴ گراف داریم. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ شمارش گراف) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» ـ تعداد رئوس گراف G خارج D برابر $۹ = ۵ - ۱۴$ است و هر کدام حداقل با یک یال، به یکی از اعضای D وصل هستند، پس حداقل ۹ یال از خارج D به اعضای D وصل می‌شوند. در داخل زیر گراف با مجموعه رئوس D هم ۱۰ یال داریم که در مجموع حداقل $۱۹ = ۱۰ + ۹$ یال وجود دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ احاطه‌گری، زیرگراف) (دشوار)

۱۳- گزینه «۱» ـ از نمودار ون استفاده می‌کنیم:



$$\text{سه رقمی فاقد ۱} = ۸ \times ۹ \times ۹ = ۸ \times ۹^{۲}$$

$$\text{فاقد رقم ۱ و ۲ (یا ۱ و ۳)} = ۷ \times ۸ \times ۸ = ۷ \times ۸^{۲}$$

$$\text{فاقد رقم ۱، ۲ و ۳} = ۶ \times ۷ \times ۷ = ۶ \times ۷^{۲}$$

به‌دست می‌آید:

$$\text{جواب} = ۸ \times ۹^{۲} - (۲ \times ۷ \times ۸^{۲} - ۶ \times ۷^{۲}) = ۴۶$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ اصل شمول و عدم شمول) (متوسط)

۱۴- گزینه «۴» ـ چون درایه‌های قطر اصلی با هم برابر هستند می‌توان مربع لاتین سه‌بعدی را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

a	$\boxed{b}$	c
c	a	$\boxed{b}$
$\boxed{b}$	c	a

$$a_{۱۲} = a_{۲۳} = a_{۳۱} = b$$

در نتیجه:

$$a_{۱۲} + a_{۲۳} + a_{۳۱} = ۳b$$

و حداکثر زمانی رخ می‌دهد که $b = ۳$، یعنی:

$$\text{حداکثر مقدار مطلوب} = ۹$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ مربع لاتین) (آسان)