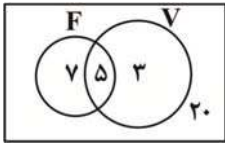


ریاضیات

۱ - گزینه «۲» - چون ۵ نفر عضو هر دو تیم هستند در نتیجه:



$$n(F - V) = 12 - 5 = 7$$

$$n(V - F) = 8 - 5 = 3$$

با توجه به تعداد اعضای دو تیم که داخل مجموعه‌ها نوشته‌ایم:

$$n((F - V) \cup (V - F)) = 7 + 3 = 10$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل اول - درس دوم - اعضای مجموعه‌ها)

۲ - گزینه «۴» -

$$S = \alpha + 1 + \beta + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{3}{2}$$

$$P = (\alpha + 1)(\beta + 1) = -2 \Rightarrow \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = -2 \Rightarrow \alpha\beta - \frac{3}{2} + 1 = -2 \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{3}{2}$$

$$\text{جدید } S = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{2(-\frac{3}{2})}{-\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$\text{جدید } P = \frac{2}{\alpha} \times \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{-\frac{3}{2}} = -\frac{8}{3}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس دوم)

۳ - گزینه «۳» - دنباله حسابی را t_n در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -1 \\ t_5 + t_6 + t_7 + t_8 = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) = -1 \\ (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) + (t_1 + 6d) + (t_1 + 7d) = 31 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4t_1 + 6d = -1 \\ 4t_1 + 22d = 31 \end{cases} \xrightarrow{-} 16d = 32 \Rightarrow d = 2, t_1 = \frac{-13}{4}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 3(t_1 + d) = 3 \times \frac{-13}{4} = \frac{-39}{4} = -9 \frac{3}{4}$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل اول - درس چهارم - دنباله حسابی)

۴ - گزینه «۲» -

$$x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = 1 - 2x \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = (1 - 2x)^2 \Rightarrow 3 = 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x = 2 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 1$$

$$A = \frac{(2)(2+1)}{(1)} = 6$$

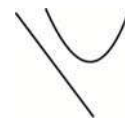
(نصیری) (پایه دهم - فصل سوم - درس چهارم - اتحادها)

۵ - گزینه «۳» - باید سهمی و خط نقطه برخوردی نداشته باشند.

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{k}{2} = 3 - x \xrightarrow{\times 2} 3x^2 - 2x + 2k = 18 - 6x \Rightarrow 3x^2 + 4x + 2k - 18 = 0$$

$$\Delta = (4)^2 - 4(3)(2k - 18) < 0 \Rightarrow 12(3k - 18) > 16 \Rightarrow 3k - 18 > \frac{4}{3} \Rightarrow 3k > 18 + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow k > 6 + \frac{4}{9} \Rightarrow k > 6 \frac{4}{9}$$



(نصیری) (پایه دهم - فصل چهارم - درس سوم - سهمی)

۶ - گزینه «۲» -

$$x = \frac{1}{4 - \sqrt{15}} = \frac{4 + \sqrt{15}}{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = 4 + \sqrt{15} \Rightarrow 2x = 8 + 2\sqrt{15} = 8 + \sqrt{60}$$

$$A = [x] + [2x] = [4 + \sqrt{15}] + [8 + \sqrt{60}] = 4 + [\sqrt{15}] + 8 + [\sqrt{60}] = 12 + 3 + 7 = 22$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس دوم - تابع جزء صحیح)

۷ - گزینه «۱» -

$$-xf(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \leq 0 \Rightarrow xy \leq 0 \quad (1)$$

رابطه (۱) نشان می‌دهد که x و y مختلف‌العلامت و یا یکی از آن‌ها صفر است. یعنی نقاط برخورد با محورها و نقاطی که در ناحیه دوم و چهارم واقع هستند جواب سوال است. با توجه به صورت سوال برای x ‌های صحیح منفی فقط $x = -2$ جواب مسئله است.

(نصیری) (پایه دهم - فصل پنجم - درس دوم - دامنه تابع)

۸ - گزینه «۳» - تابع نمایی a^x برای $0 < a < 1$ ، اکیداً نزولی است. پس:

$$0 < \frac{k-1}{3} < 1 \xrightarrow{\times 3} 0 < k-1 < 3 \xrightarrow{+1} 1 < k < 4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - تابع یکنوا)

۹ - گزینه «۳» -

$$f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (-1, 0)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (-1, -1)\}$$

$$g = \{(0, -1), (1, 1), (2, 3), (-1, -3)\}$$

$$x \xrightarrow{f^{-1}} (f^{-1})(x) \xrightarrow{g} g((f^{-1})(x)) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \xrightarrow{f^{-1}} 0 \xrightarrow{g} -1 \\ 1 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{g} 1 \\ 2 \xrightarrow{f^{-1}} 2 \xrightarrow{g} 3 \\ -1 \xrightarrow{f^{-1}} -1 \xrightarrow{g} -3 \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f^{-1} = \{(0, -1), (1, 1), (2, 3), (-1, -3)\}$$

برد تابع مورد نظر $\{-1, 1, 3, -3\}$ است. (نصیری) (پایه دهم - درس دوازدهم - ترکیب توابع)

۱۰ - گزینه «۲» -

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_2 x + 1 = -\log_2 \frac{1}{x+4} \Rightarrow \log_2 x - \log_2 (x+4) = -1 \Rightarrow \log_2 \frac{x}{x+4} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = x+4 \Rightarrow x = 4$$

$$f(4) = \log_2 4 + 1 = 3$$

پس نقطه برخورد $A(4, 3)$ است.

$$|OA| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - درس دوم - معادله لگاریتمی)

۱۱ - گزینه «۱» -

$$4 \cos^2 x + \frac{3}{4} (2 \sin x \cos x)^2 = \sin^2 x \Rightarrow 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x$$

طرفین رابطه بالا را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم.

$$4 + 3 \tan^2 x = \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x - 3 \tan^2 x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan^2 x = -1 \text{ (غ ق ق)} \\ \tan^2 x = 4 \end{cases}$$

$$\tan^2 \left(\frac{7\pi}{4} + x \right) = \cot^2 x = \frac{1}{4}$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - پایه یازدهم - فصل چهارم - روابط و متمم‌ها)

$$\sin^2 x (1 + \tan^2 x) = \tan^2 x$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x (\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi & (1) \\ \cos^2 x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi & (2) \end{cases}$$

اجتماع جواب‌های به دست آمده $\frac{k\pi}{2}$ است که تنها عضو آن در بازه $(0, \pi)$ عدد $\frac{\pi}{2}$ است که این عدد هم در معادله صدق نمی‌کند زیرا در دامنه آن قرار ندارد. پس معادله جوابی ندارد. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - معادلات مثلثاتی)

$$f(x) = -\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - دروس اول و دوم)

۱۴ - گزینه «۴» - چون حد مخرج کسر صفر است پس باید حد صورت کسر نیز صفر شود.

$$\lim_{x \rightarrow 4} (a+1+\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow a+1+2=0 \Rightarrow a=-3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+2\sqrt{x}+4} = \frac{1}{12}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل پنجم - درس چهارم - حد $\frac{0}{0}$)

۱۵ - گزینه «۴» - با توجه به اینکه حاصل حد $+\infty$ شده است پس باید مخرج ریشه مضاعف $x=2$ داشته باشد، از طرفی چون ضریب x^2 برابر ۳ است پس باید مخرج به صورت $3(x-2)^2$ باشد.

$$3(x-2)^2 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3x^2 - 12x + 12 \quad (1)$$

با مقایسه رابطه (۱) و مخرج کسر $b = -12$, $c = 12$ به دست می‌آید.

$$\lim_{x \rightarrow 12} \frac{b-c}{(x-c)^2} = \lim_{x \rightarrow 12} \frac{-24}{(x-12)^2} = -\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول)

۱۶ - گزینه «۴» - فرض می‌کنیم $f(x) = ax + b$ باشد. با توجه به اطلاعات مسئله:

$$\begin{cases} f(0) = -1 \Rightarrow b = -1 \\ f(2) = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f(x-1)}{xf(2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{1}{2}x-1)(\frac{1}{2}(x-1)-1)}{x(\frac{1}{2}(2x)-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{1}{2}x) \times (\frac{1}{2}x)}{x \times x} = \frac{1}{4}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - حد در بی‌نهایت)

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b \left[\frac{f}{x} \right] = 3b$$

چون f در $x=1$ پیوسته است.

$$b+1=3b \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} b \left[\frac{f}{x} \right] = b \left[\frac{f}{2^+} \right] = \frac{1}{2} [2^-] = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل پنجم - درس پنجم - پیوستگی)

۱۸ - گزینه «۳» - نقطه A را به صورت $A(x, \sqrt{x})$ در نظر می‌گیریم:

$$x\sqrt{x} = 8 \Rightarrow (\sqrt{x})^3 = 8 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 2)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4} \text{ (شیب خط مماس)}$$

$$\text{خط مماس: } y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \xrightarrow{y=0} -2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow x = -4$$

پس طول نقطه C برابر ۴- است. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول - خط مماس)

۱۹ - گزینه «۳» - ضابطه $f'(x)$ را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = x\sqrt{1-x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 0 - \frac{1}{2 \cdot 0^+} = -\infty$$

پس $f'(x)$ در همسایگی $x = 1$ به صورت خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - عدم وجود مشتق)

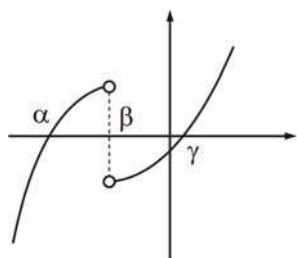
۲۰ - گزینه «۳» -

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x > 0} f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f''(1) = \frac{3}{4}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - محاسبه مشتق)

۲۱ - گزینه «۱» - تابع $f(x)$ پیوسته و f' در سه نقطه تغییر علامت داده است.



x	$-\infty$	α	β	γ	$+\infty$		
f'	-	۰	+	ت ن	-	۰	+

نقاط به طول‌های α و γ مینیمم نسبی و نقطه به طول β ماکزیمم نسبی می‌باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - اکسترمم نسبی)

۲۲ - گزینه «۱» - معادله سهمی به صورت $y = a(x-2)^2 + 1$ است و چون $f(0) = 4$ است پس:

$$a(0-2)^2 + 1 = 4 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}(x-2)^2 + 1 = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4$$

نقطه M روی سهمی است پس همواره به صورت $M(x, \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4)$ می‌باشد. محیط مستطیل را L در نظر می‌گیریم.

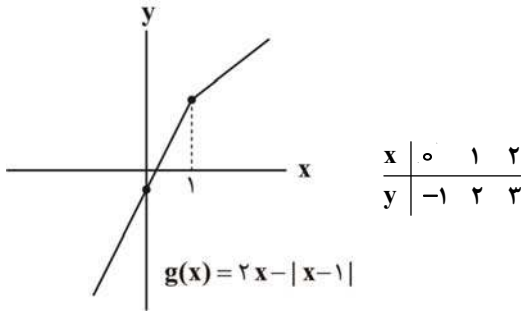
$$L = 2(x + \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 8$$

حداقل L برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ است.

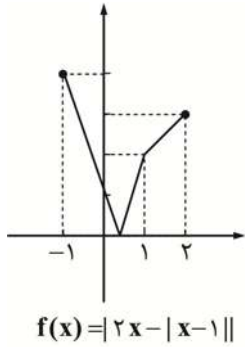
$$\min(L) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16-48)}{6} = \frac{16}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس دوم - بهینه‌سازی)

۲۳ - گزینه «۳» - نمودار تابع $g(x) = 2x - |x-1|$ را رسم می‌کنیم.



حال $f(x) = |g(x)|$ را در فاصله $[-1, 2]$ رسم می‌کنیم.



ملاحظه می‌کنید که تابع f نقطه بحرانی دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - نقطه بحرانی)

۲۴ - گزینه «۱» - اگر دو خط $y = 2x$ و $x + y = 4$ را قطع دهیم مختصات نقطه A به دست می‌آید.

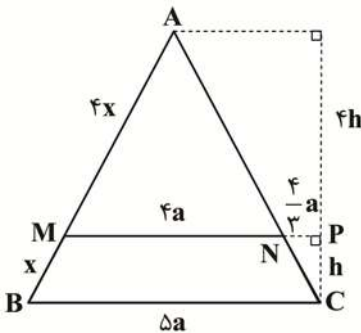
$$x + y = 4 \xrightarrow{y=2x} x + 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{8}{3}$$

مختصات نقطه $A(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ می‌باشد. فاصله A از خط $y = 1$ برابر $|\frac{8}{3} - 1| = \frac{5}{3}$ خواهد بود.

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس اول - هندسه تحلیلی)

۲۵ - گزینه «۲» -

$$\frac{S(ABC)}{S(MPCB)} = \frac{\frac{1}{2} \times \Delta a \times \Delta h}{\frac{1}{2} (\Delta a + \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}a) \times h} = \frac{2\Delta ah}{\frac{31}{3}ah} = \frac{75}{31}$$



(نصیری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس دوم - تالس و تشابه)

۲۶ - گزینه «۳» - داده‌ها را به صورت $x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d$ در نظر می‌گیریم. میانگین داده‌ها برابر x است، پس $x = 30$ خواهد بود.

از طرفی چارک سوم ۳۸ است.

$$x + d = 38 \xrightarrow{x=30} d = 8$$

چارک اول $x - d$ می‌باشد، پس چارک اول ۲۲ است. (نصیری) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس دوم - چارک و میانگین)

۲۷ - گزینه «۳» - چون واریانس صفر است پس داده‌ها با هم برابرند.

$$\begin{cases} a-1=7-a \Rightarrow a=4 \\ 7-a=a+b \xrightarrow{a=4} 3=4+b \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

$$\bar{y} = \frac{a+b^2+7}{3} = \frac{4+1+7}{3} = 4$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس دوم - واریانس و میانگین)

۲۸ - گزینه «۲» - حروف تکراری را کنار هم قرار می‌دهیم:

seemiiicrrl

حروف تکراری یک حرف محسوب می‌شوند و جابه‌جایی آن‌ها ۷! خواهد بود. (نصیری) (پایه دهم - فصل ششم - درس دوم - جایگشت)

۲۹ - گزینه «۴» - با توجه به جدول خانه‌هایی که عدد یک تاس بر دیگری بخش‌پذیر باشد را علامت زده‌ایم تعداد آن‌ها ۲۲ تاست.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	✓	✓	✓	✓	✓	✓
۲	✓	✓		✓		✓
۳	✓		✓			✓
۴	✓	✓		✓		
۵	✓				✓	
۶	✓	✓	✓			✓

پس:

$$P(A) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال مقدماتی)

۳۰ - گزینه «۲» - در این سوال شرط مسئله یک پسر بودن است پس فضای نمونه کاهش یافته ۷ عضو خواهد داشت یعنی حالت «سه دختری» حذف

می‌شود. برای آن که دو فرزند دیگر دختر باشد سه حالت {پ د د، د پ د، د د پ} مطلوب است پس:

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال شرطی)