

ریاضی

۱ - گزینه «۱» - مفهوم این سؤال این است که  $(k, k+3) \subseteq (-1+k, 3)$  می باشد پس:

$$\begin{cases} k \geq -1+k \Rightarrow 0 \geq -1 \Rightarrow k \in \mathbb{R} \\ k+3 \leq 3 \Rightarrow k \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \leq 0$$

(نصیری) (پایه دهم - مجموعه - اشتراک)

۲ - گزینه «۲» - جملات دنباله را  $a$  و  $ar$  و  $\frac{a}{r}$  در نظر می گیریم، پس داریم:

$$\begin{cases} \frac{a}{r} + a + ar = 38 \\ \frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 1728 \Rightarrow a^3 = 1728 \Rightarrow a = 12 \end{cases} \Rightarrow 6\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 19 \Rightarrow 6(1+r+r^2) = 19r \Rightarrow 6r^2 + 6r + 6 = 19r$$

$$\Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{2}{3} \Rightarrow 18, 12, 8 \\ r = \frac{3}{2} \Rightarrow 8, 12, 18 \end{cases}$$

بنابراین بزرگ ترین عدد دنباله ۱۸ است. (نصیری) (پایه دهم - دنباله - دنباله هندسی)

۳ - گزینه «۴» - به کمک اتحادهای مکعب دو جمله ای می توانیم حاصل این عبارت را بدست آوریم.

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (a+b)^2 &= 2a^2 + 2ab^2 \\ (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2 &= 2(2)^2 + 6(2)(\sqrt{3})^2 = 16 + 12 \times 3 = 16 + 36 = 52 \end{aligned}$$

(نصیری) (پایه دهم - توان های گویا - اتحادهای رادیکالی)

۴ - گزینه «۳» - محل برخورد ضلع AC و ارتفاع BH جواب مسئله است. معادله AC را می نویسیم.

$$m_{AC} = \frac{0+1}{5+4} = \frac{1}{9}$$

$$AC: y-0 = \frac{1}{9}(x-5) \Rightarrow 9y = x-5 \quad (1)$$

BH بر AC عمود است پس شیب BH برابر ۹- خواهد بود.

$$BH: y-5 = -9(x-0) \Rightarrow y = 5-9x \quad (2)$$

خط های (۱) و (۲) را قطع می دهیم:

$$9(5-9x) = x-5 \Rightarrow -81x-x = -5-45 \Rightarrow -82x = -50 \Rightarrow x = \frac{25}{41}$$

$$y = 5-9x = 5-9 \times \frac{25}{41} = \frac{205-225}{41} = \frac{-20}{41}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - معادله و جبر - هندسه تحلیلی)

۵ - گزینه «۴» - در معادله  $3x^2 - x - 1 = 0$  ریشه ها  $\alpha$  و  $\beta$  هستند. پس:

$$S = \alpha + \beta = \frac{1}{3}, p = \alpha\beta = -\frac{1}{3}$$

حال مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله جدید را تشکیل می دهیم:

$$S_{New} = (\alpha - 2\beta) + (\beta - 2\alpha) = -(\alpha + \beta) = -\frac{1}{3}$$

$$P_{New} = (\alpha - 2\beta)(\beta - 2\alpha) = \alpha\beta - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + 4\alpha\beta = 5\alpha\beta - 2(\alpha^2 + \beta^2) = 5P - 2(S^2 - 2P)$$

$$= 5\left(-\frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right) = \frac{-5}{3} - 2 \times \frac{3}{9} = \frac{-15-14}{9} = -\frac{29}{9}$$

حال معادله جدید را می نویسیم:

$$x^2 - S_{new}x + P_{new} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{29}{9} = 0 \xrightarrow{\times 9} 9x^2 + 3x - 29 = 0$$

(نصیری) (پایه یازدهم - معادله و جبر - ساختن معادله درجه ۲)

۶ - گزینه «۴» - اگر در سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  و  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، آن سهمی از هر چهار ناحیه مختصات عبور می‌کند.

$$\frac{7 + \frac{m}{2}}{2m} < 0 \Rightarrow \frac{14 + m}{4m} < 0 \Rightarrow -14 < m < 0$$

(نصیری) (پایه یازدهم - معادله و جبر - سهمی ساده)

۷ - گزینه «۱» -

$$\sin 50^\circ = \cos 40^\circ \Rightarrow A = \frac{\sin 70^\circ + \cos 80^\circ}{\cos 80^\circ + \sin 70^\circ} = 1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - مثلثات - تغییر زاویه)

۸ - گزینه «۴» - میانگین و انحراف معیار داده‌ها به ترتیب ۴ و ۱/۵ است. پس ضریب تغییرات برابر است با:

$$CV_1 = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1/5}{4} = \frac{1}{20} = 0.05$$

اگر دو واحد از داده‌ها کم کنیم، انحراف معیار بدون تغییر می‌ماند، اما از میانگین دو واحد کم می‌شود پس ضریب تغییرات جدید برابر است با:

$$CV_2 = \frac{\sigma}{\bar{x} - 2} = \frac{1/5}{2} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$CV_2 - CV_1 = 0.1 - 0.05 = 0.05$$

(نصیری) (پایه یازدهم - آمار - ضریب تغییرات)

۹ - گزینه «۱» - ارقام فرد را یک عدد در نظر می‌گیریم.

۱ ۳ ۵ ۲ ۴ ۶

پس تعداد جایگشت‌ها برابر  $4! \times 3!$  خواهد بود. (نصیری) (پایه دهم - شمارش - جایگشت)

۱۰ - گزینه «۲» -

$$f(x) = a + 1 + b^x$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + 1 + b = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

$$f(2) = 4 \Rightarrow a + 1 + b^2 = 4 \Rightarrow a + b^2 = 3$$

تفاضل دو رابطه بالا را بدست می‌آوریم:

$$b^2 - b = 2 \xrightarrow{b > 0} b = 2 \xrightarrow{a + b = 1} a = -1 \Rightarrow f(x) = 2^x$$

$$f(\log_2 3) = 2^{\log_2 3} = 3$$

(نصیری) (پایه یازدهم - نمایی و لگاریتمی - قوانین لگاریتم)

۱۱ - گزینه «۲» -

$$\log_2 x - \log_2 (2x + 3) = -2 \Rightarrow \log_2 \frac{x}{2x + 3} = -2 \Rightarrow \frac{x}{2x + 3} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x = 2x + 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\log_{(2x+3)} 2x = \log_{2^2} 3 = \log_{2^2} 3 = \frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - نمایی و لگاریتمی - معادله لگاریتمی)

۱۲ - گزینه «۴» -

$$y = \frac{2^{2x} + 1}{2^{2x}} = 1 + \frac{1}{2^{2x}} \Rightarrow 2^{2x} = \frac{1}{y-1} \Rightarrow 2x = \log_2 \frac{1}{y-1} = -\log_2 (y-1) \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \log_2 (y-1)$$

$$= -\log_2 \sqrt{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\log_2 \sqrt{x-1}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - نمایی و لگاریتمی - وارون تابع نمایی)

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = f(\tan 2x) = \frac{f \tan 2x}{1 + \tan^2 2x} = \frac{f \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\frac{1}{\cos^2 2x}}$$

$$\Rightarrow (\text{fog})(x) = f \sin 2x \cos 2x = 2 \sin 2x \Rightarrow (\text{fog})\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{8} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - نسبت‌های ۲۵)

۱۴ - گزینه «۱» - در نامعادله  $|2x^2 - 1| < x$  باید  $x > 0$  باشد.

$$|2x^2 - 1| < x \xrightarrow{x > 0} |2x^2 - 1| < x \Rightarrow (2x^2 - 1 - x)(2x^2 - 1 + x) < 0 \Rightarrow (2x^2 - x - 1)(2x^2 + x - 1) < 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x-1)(2x+1)(x+1)(2x-1)}_{p(x)} < 0$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
p(x)		+	o	-	o	+

$$p(x) < 0 \xrightarrow{(x > 0)} \frac{1}{2} < x < 1$$

(نصیری) (پایه دهم - نامعادله - نامعادله قدر مطلق)

۱۵ - گزینه «۳» - تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(s) = \binom{16}{5}$$

و تعداد اعضای فضای مساعد برابر است با:

$$n(A) = \binom{8}{2} \binom{12}{1}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{8}{2} \times \binom{12}{1}}{\binom{16}{5}} = \frac{\frac{8 \times 7}{2} \times 12}{\frac{16!}{5! \times 11!}} = \frac{1}{13}$$

(نصیری) (پایه دهم - احتمال - احتمال مقدماتی ساده)

۱۶ - گزینه «۴» -

$$(x-2)^2 < 16 \Rightarrow -4 < x-2 < 4 \xrightarrow{+2} -2 < m < 6$$

$(x-2)^2 < 16$  همسایگی محذوف عدد ۲ نیست زیرا  $x=2$  عضو بازه  $(-2, 6)$  می‌باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم - حد - همسایگی)

۱۷ - گزینه «۱» - در  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{p(x+1)}{x^2 - 9x}$  حد مخرج صفر است، پس باید حد صورت نیز صفر شود.

$$\lim_{x \rightarrow 9} P(x+1) = 0 \Rightarrow P(10) = 0$$

باقیمانده  $Q(x) = xP(x) - 2x^2 + 5$  بر  $x-10$  برابر  $Q(10)$  است.

$$Q(10) = 10P(10) - 2 \times 10^2 + 5 = 5 - 200 = -195$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد  $\frac{0}{0}$ )

۱۸ - گزینه «۴» - با انتخاب  $x = 3^{2n}$  داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} \times 3^2 - 3^{-2n} \times 3^2}{2 \times 3^1 \times 3^{2n} + 3^{-2n} \times 3^{-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x - \frac{27}{x}}{6x + \frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{6x} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد در بی نهایت)

۱۹ - گزینه «۳» - اگر از کیسه اول انتخاب شوند و هم رنگ باشند:

$$P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{4 \times 3}{2} + 1}{\frac{7 \times 6}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{21} = \frac{1}{6}$$

اگر از کیسه دوم انتخاب شوند و هم رنگ باشند:

$$P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{2}{2} + \binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 + 15}{28} = \frac{1}{4}$$

احتمال مطلوب برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - احتمال - قاعده احتمال کل)

۲۰ - گزینه «۳» - چون  $f(x)$  عامل  $x-2$  دارد پس:

$$f(x) = \frac{(x-2)(2x-1)}{\sqrt{2x}} = (x-2) \times \frac{2x-1}{\sqrt{2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{-(x-2)} = - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{\sqrt{2x}} = -\frac{3}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - تعریف مشتق)

۲۱ - گزینه «۲» -  $f'$  در  $x = 4$  پیوسته است.

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \Rightarrow 16a + 64 = b + 2 \Rightarrow b = 16a + 62$$

مشتق چپ و راست  $f'$  در  $x = 4$  برابر است

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3x^2 & x < 4 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x \geq 4 \end{cases}$$

$$f'_+(4) = f'_-(4) \Rightarrow 8a + 48 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 32a + 48 \times 4 = 1 \Rightarrow 32a = -191$$

$$b = 16a + 62 = \frac{-191}{2} + 62 \xrightarrow{\times 2} 2b = -191 + 124 \Rightarrow 2b = -67$$

$$32a + 2b = -191 - 67 = -258$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق پذیری)

۲۲ - گزینه «۱» - دامنه تابع  $[0, +\infty)$  است پس  $x=0$  نقطه بحرانی تابع  $f(x)$  خواهد بود. تابع در  $x=4$  و  $x=6$  هم به دلیل ناپیوستگی بحرانی دارد. حال به بحرانی‌های ضابطه‌ها می‌پردازیم:

$$y = x^2 - 4x \Rightarrow y' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \in (0, 4)$$

پس  $x=2$  بحرانی است.

$$y = \sqrt[3]{x-5} \Rightarrow (x=5 \text{ نقطه بحرانی است})$$

$$y = |x^2 - 49| \Rightarrow \begin{cases} x=0 \notin (6, 8) \\ x=7 \in (6, 8) \\ x=-7 \notin (6, 8) \end{cases}$$

پس  $x=7$  نقطه بحرانی ضابطه سوم است. در نهایت نقاط بحرانی  $\{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$  خواهد بود.

(نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - نقاط بحرانی)

۲۳ - گزینه «۲» -

$$f(x) = x^3 - 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$f(-2) = -8 + 18 = 10$$

$$f(3) = 27 - 27 = 0$$

$$f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = \sqrt{108}$$

$$f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3} = -\sqrt{108}$$

ماکزیمم مقدار  $6\sqrt{3}$  و مینیمم مقدار  $-6\sqrt{3}$  است پس مجموع آنها صفر است. (نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - اکسترم‌های مطلق)

۲۴ - گزینه «۱» - چون دوره تناوب  $f(x)$  برابر ۸ است پس:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(3 - 2f(1-4x)) \Rightarrow T = \frac{8}{| -4 |} = 2$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - دوره تناوب)

۲۵ - گزینه «۲» -

$$f(-1) = 11 \Rightarrow -a + b - c = 11 \quad (1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \quad (2)$$

$$f(-2) = 22 \Rightarrow -8a + 4b - 2c = 22 \xrightarrow{\div 2} -4a + 2b - c = 11 \quad (3)$$

$$\begin{cases} (1) + (2) \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 11 \\ -a = 11 \end{cases} \\ (2) + (3) \Rightarrow \begin{cases} a = -11 \\ b = -33 \end{cases} \end{cases}$$

$$a + b = -11 - 33 = -44$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - اکسترم نسبی)

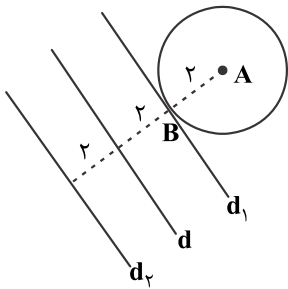
۲۶ - گزینه «۲» -

$$\cos 3x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \cos 3x = \sin 2x \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - معادله مثلثاتی)

۲۷ - گزینه «۲» - مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله ۲ سانتی متر باشد، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی متر است و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۲ سانتی متر باشد، دو خط موازی به فاصله (۲) از d است. (خط‌های  $d_1$  و  $d_2$ ). جواب مسئله مکان مشترک است که در شکل با نقطه B نمایش داده‌ایم.

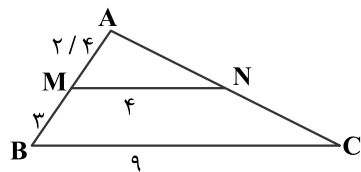


(نصیری) (پایه دوازدهم - هندسه - مکان هندسی)

۲۸ - گزینه «۴» - به کمک تالس x را حساب می‌کنیم

$$\frac{x+2}{x+2+2} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9(x+2) = 4(x+4) \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = 0.4$$

به کمک  $x = 0.4$  ابعاد به صورت زیر است. مثلث‌های AMN و ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها  $\frac{4}{9}$  است.

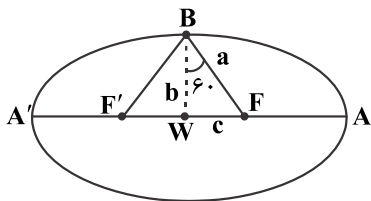


$$S_{AMN} = S_1, S_{ABC} = S, S_{MNCB} = S_2$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_1}{S_1 + S_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow 4S_1 + 4S_2 = 9S_1 \Rightarrow 4S_2 = 5S_1 \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = 1.25$$

(نصیری) (پایه یازدهم - هندسه - تالس)

۲۹ - گزینه «۲» -



$$|AA'| = |7 + 5| = 12 = 2a \Rightarrow a = 6$$

$$\cos 60^\circ = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b}{6} \Rightarrow b = 3$$

$$W = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow W = (1, 2) \xrightarrow{b=3} B = (1, 5)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - هندسه - بیضی)

۳۰ - گزینه «۱» - اگر خط  $x + y = m$  بر دایره  $x^2 + y^2 + y - x - 2 = 0$  مماس باشد، باید فاصله مرکز دایره تا خط مماس، برابر شعاع دایره باشد.

$$\text{مرکز دایره: } O\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), r = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+8} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

فاصله مرکز دایره یعنی  $O\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  را تا خط  $x + y - m = 0$  را برابر شعاع دایره قرار می‌دهیم.

$$|OH| = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - m\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \Rightarrow |m| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{10} = \sqrt{5} \xrightarrow{m > 0} m = \sqrt{5}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - هندسه - دایره)