

ریاضی

۱- گزینه «۳» - توجه کنید چون $n \in \mathbb{N}$ است پس $1 < \frac{2n}{2n+1} < 0$ خواهد بود.

$$b_n = [(-1)^{n!} + \frac{2n}{2n+1}] = (-1)^{n!} + [\frac{2n}{2n+1}] = (-1)^{n!}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{99} = -1 + 1 + 1 + \dots + 1 = -1 + 99 = 98$$

$$a_n = [\frac{2n(-1)^n}{2n+1}] = \begin{cases} [\frac{2n}{2n+1}] & \text{زوج } n \\ [\frac{-2n}{2n+1}] & \text{فرد } n \end{cases}$$

جملات ردیف فرد دنباله a_n برابر ۱- و جملات ردیف زوج آن برابر صفر است.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = 50(-1) + 50(0) = -50$$

بنابراین مجموع صد جمله دنباله c_n برابر ۴۸ است. (نصیری) (پایه دهم - دنباله) (دشوار)

۲- گزینه «۳» -

$$\begin{cases} a_r - a_\delta = A \\ a_r - a_\epsilon = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 q^r - a_1 q^\delta = A \\ a_1 q - a_1 q^r = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 q^r (1 - q^{\delta-r}) = A \\ a_1 q (1 - q^{r-1}) = B \end{cases} \xrightarrow{+} q = \frac{A}{B}$$

$$a_1 = \frac{A}{(\frac{A}{B})^r (1 - \frac{A^r}{B^r})} = \frac{A}{\frac{A^r}{B^r} (1 - \frac{A^r}{B^r})} = \frac{B^r}{A(B^r - A^r)}$$

(نصیری) (پایه دهم - دنباله - دنباله هندسی) (متوسط)

۳- گزینه «۱» -

$$S_{ABC} = 2S_{CDE} \Rightarrow \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{2}{2} \times 2 \times 2 \sin \hat{C} \Rightarrow ab = 18$$

$$a + b + 7 = 18 \Rightarrow a + b = 11$$

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ ab = 18 \end{cases} \Rightarrow (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 11^2 - 4 \times 18 \Rightarrow (a - b)^2 = 121 - 72 = 49 \Rightarrow |a - b| = 7$$

(نصیری) (پایه دهم - مثلثات - مساحت) (متوسط)

۴- گزینه «۲» -

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{x}+2)^2 (\sqrt{x}-2)(x+4)}}{x^2 - 16} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)(x+4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-4}{x-4} = 1$$

(نصیری) (پایه دهم - اتحاد) (آسان)

۵- گزینه «۳» - باید رقم سمت چپ فرد باشد تا این که ارقام یک در میان زوج و فرد باشند، تعداد زوجها ۴ تا و تعداد فردها ۵ تا است، پس تعداد

کل $4! \times 5!$ خواهد بود. (نصیری) (پایه دهم - شمارش - جایگشت) (ساده)

۶- گزینه «۴» - با توجه به نمودار $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ و $\Delta > 0$ است.

$$c < 0 \Rightarrow c^f > 0 \xrightarrow{\substack{a > 0, b < 0 \\ abc > 0}} c^f + abc > 0$$

(نصیری) (پایه یازدهم - جبر و معادله - سهمی) (متوسط)

۷- گزینه «۲» - با فرض $DE = x$ و $AG = 2b$ داریم:

$$GE = 2b, EF = 4x$$

$$\triangle AEC : BG \parallel CE \Rightarrow \frac{AG}{GE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{2b}{2b} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AB = \frac{2}{3} BC$$

$$\triangle BDF : CE \parallel BF \Rightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{x}{4x} = \frac{DC}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow DC = \frac{1}{4} BC$$

$$\frac{AD}{AB + CD} = \frac{AB + BC + CD}{AB + CD} = \frac{\frac{2}{3} BC + BC + \frac{1}{4} BC}{\frac{2}{3} BC + \frac{1}{4} BC} = \frac{23}{11}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - هندسه - تالس) (دشوار)

۸- گزینه «۴» -

$$S_1 = S_{ACE}, \alpha = \widehat{ACE} = \widehat{ECD}, S_r = S_{CED}$$

$$S_r = \Delta S_1 \Rightarrow \frac{1}{r} DC \times CE \times \sin \alpha = \Delta \times \frac{1}{r} \times AC \times CE \times \sin \alpha \Rightarrow DC = \Delta AC \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \Delta$$

(نصیری) (پایه دهم - مثلثات - مساحت) (آسان)

۹- گزینه «۳» -

$$\sqrt{r} \sin\left(\frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{r} \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{r} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{r}{2}$$

$$\sqrt{r} \cos\frac{17\pi}{6} = \sqrt{r} \cos\left(\frac{16\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{r} \cos\frac{\pi}{6} = 1$$

$$A = -\frac{r}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^r \frac{A\pi}{r} = \cos^r\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - مثلثات - تغییر زاویه) (آسان)

۱۰- گزینه «۱» -

$$y = f(x) = 3^{1-x} + 2 \Rightarrow y - 2 = 3^{1-x} \Rightarrow 1 - x = \log_3(y - 2) \Rightarrow x = 1 - \log_3(y - 2) = \log_3 3 - \log_3(y - 2)$$

$$= \log_3 \frac{3}{y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_3 \frac{3}{x - 2} \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow km = 6$$

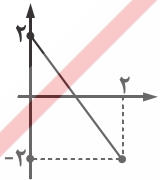
(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تابع وارون) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» - دامنه دو تابع f و g با هم برابرند.

$$D_f = D_g = \{x \mid x \geq 0\} \cap \{x \mid 2 - x \geq 0\} = [0, 2]$$

$$y = (fg)(x) = f(x)g(x) = (2 - x) - (x) = 2 - 2x$$

پس جواب مسئله نمودار تابع خطی $y = 2 - 2x$ در فاصله $[0, 2]$ است.



(نصیری) (پایه یازدهم - تابع - اعمال تابع) (آسان)

۱۲- گزینه «۱» -

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\log_3(x - 2) > 0 \Rightarrow x - 2 > 3^0 \Rightarrow x > 3$$

$$D = (2, +\infty) \cap (3, +\infty) = (3, +\infty)$$

اشتراک بازه‌های به دست آمده دامنه تابع است.

(نصیری) (پایه یازدهم - لگاریتم - دامنه لگاریتم) (آسان)

۱۳- گزینه «۴» -

$$f(k) = \lim_{x \rightarrow k} f(x) \Rightarrow k^2 = 6 - k \Rightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k = 2, -3$$

$k = 2$ قابل قبول است.

$$f(k) = f(2) = 6 - 2 = 4$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد و پیوستگی - پیوستگی در بازه) (آسان)

۱۴- گزینه «۲» - تابع f در $x = 2$ مینیمم نسبی دارد و مقدار آن -2 است و در $x = -1$ مقدار صحیح ندارد، پس:

$$A = [(-2)^+] + \left[\frac{3}{-}\right] = -2 + 1 = -1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد و پیوستگی - حد و براکت‌ها) (متوسط)

۱۵- گزینه «۱» - مفهوم این سؤال این است که سه مهره اول آبی و چهارمین مهره زرد خارج شود.

$$P(A) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{63}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - احتمال - پیشامدهای مستقل) (آسان)

۱۶- گزینه «۲» -

$$\bar{x} = \frac{x+x+2+x+2+x+7}{4} = x+2$$

$$\sigma_1^2 = \frac{(2)^2 + (1)^2 + (0)^2 + (4)^2}{4} = \frac{9+1+16}{4} = \frac{26}{4} = 6.5$$

با تغییرات گفته شده داده‌ها به صورت $x+2, x+2, x+3, x+9$ خواهد شد.

$$\bar{y} = \frac{x+2+x+2+x+3+x+9}{4} = x+4$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(2)^2 + (2)^2 + (1)^2 + (5)^2}{4} = \frac{9+25}{4} = \frac{34}{4} = 8.5$$

$$\sigma_2^2 - \sigma_1^2 = 8.5 - 6.5 = 2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - آمار - واریانس) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» - اگر درجه $P(x)$ هشت نباشد، $a=1$ است.

$$a=1 \Rightarrow P(x) = (x^2+1)^4 - (x^2+x)^4 \Rightarrow P(x) = (x^4+2x^2+1)^2 - (x^4+2x^3+x^2)^2$$

$$\Rightarrow P(x) = ((x^4+2x^2+1) + (x^4+2x^3+x^2))((x^4+2x^2+1) - (x^4+2x^3+x^2))$$

$$\Rightarrow P(x) = (2x^4+2x^2+3x^2+1)(-2x^3+x^2+1)$$

اگر دو پرانتز در هم ضرب شوند، درجه $p(x)$ برابر ۷ خواهد شد. (نصیری) (دوازدهم) (پایه دوازدهم - چندجمله‌ای - درجه چندجمله‌ای) (آسان)

۱۸- گزینه «۳» - مفهوم سؤال اشتراک دامنه و برد تابع $f(x)$ است.

$$D_f = [0, +\infty), R_f = (-\infty, 1]$$

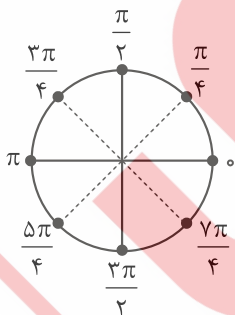
$$D_f \cap R_f = [0, 1]$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تابع وارون) (متوسط)

۱۹- گزینه «۲» - نقاط خارج از دامنه عبارتند از:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$x = k\pi, x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$



این نقاط را روی یک دایره مثلثاتی ببینید:

جمله عمومی این نقاط $\frac{k\pi}{4}$ است، پس:

$$D = \mathbb{R} - \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - تابع تانژانت) (دشوار)

۲۰- گزینه «۱» -

$$\cos^2 2x - \cos^2 x = \sin^2 2x - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \cos 4x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi \\ 4x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

اجتماع جواب‌های به دست آمده $\frac{k\pi}{3}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - معادله مثلثاتی) (آسان)

۲۱- گزینه «۱» -

$$f(1) = -11 \Rightarrow 1 + 4 - 8 + m = -11 \Rightarrow m = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{\left[\frac{x}{2}\right] + x - 3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 4x^2 - 8x - 8}{1 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 6x + 4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 6x + 4) = 20$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد $\frac{0}{0}$) (متوسط)

۲۲- گزینه «۱» -

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \frac{a+1}{a} = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x^2 - 1}{x(x+1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x^2 - 1}{x(x+1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد بی‌نهایت) (متوسط)

۲۳- گزینه «۲» - در همسایگی چپ $x = 2$ داریم:

$$f(x) = (4 - x^2)[-(2^-)] = 2x^2 - 8 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow f'_-(2) = 8$$

پس شیب نیم مماس چپ برابر ۸ و نقطه تماس $(2, 0)$ است.

$$\text{خط مماس: } y - 0 = 8(x - 2) \Rightarrow y + 16 = 8x$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق یک طرفه) (آسان)

۲۴- گزینه «۲» - خواسته مسئله $f'(2)$ است.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \frac{-9-2}{(x-2)^2}}{3^2 \sqrt[3]{x-2}} \Rightarrow f'(2) = \frac{2 \times (-11)}{3 \times (-2)} = \frac{11}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - قوانین مشتق‌گیری) (متوسط)

۲۵- گزینه «۱» -

$$f'(x) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 1} = 2 \Rightarrow 2x^2 - 2 = x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{1} \xrightarrow{1 \leq x \leq 2} x = \sqrt{\frac{2}{1}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - آهنگ تغییر) (آسان)

۲۶- گزینه «۱» -

$$x^2 = 2 - y \Rightarrow A = y^2(2 - y)^2$$

$$A' = 2y^2(2 - y)^2 - 2(2 - y)y^2 = 0 \Rightarrow y^2(2 - y)(9 - 3y - 2y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow A = 0 \\ y = 2 \Rightarrow A = 0 \\ y = \frac{9}{5} = 1/8 \Rightarrow A = \max \end{cases}$$

مقدار $y = 1/8$ قابل قبول است. (نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - بهینه‌سازی) (متوسط)

۲۷- گزینه «۱» -

$$y' = 3x^2 + 2x + \frac{1}{k} \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow 4 - 4(3)\left(\frac{1}{k}\right) \leq 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{k} \leq 0 \Rightarrow \frac{k-3}{k} \leq 0 \Rightarrow 0 < k \leq 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - کاربرد مشتق - یکنوایی تابع) (متوسط)

۲۸- گزینه «۳» - مفهوم این سؤال این است که چهارضلعی ABCD مربع است.

$$FF' = 2b \Rightarrow 2c = 2b \Rightarrow b = c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2 \Rightarrow a = c\sqrt{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - هندسه - بیضی) (متوسط)

۲۹- گزینه «۱» - مرکز دایره روی خط $y = x$ قرار دارد، پس می‌توانیم مرکز را (α, α) فرض کنیم:

$$2r = \frac{|2+2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

معادله دایره:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = 2 \xrightarrow{(1,1)} (1-\alpha)^2 + (1-\alpha)^2 = 2 \Rightarrow (\alpha-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

مرکز دایره $(0, 0)$ یا $(2, 2)$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - هندسه - دایره) (متوسط)

۳۰- گزینه «۳» - ۵ مهره انتخابی، سه تا از A و دو تا از B بوده است.

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{15+4}{35} = \frac{19}{35}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - احتمال - قاعده کل) (متوسط)

