

ریاضی

۱- گزینه «۴» - جملات با افزودن a به شکل $9+a$ ، $5+a$ و $2+a$ تبدیل یافته و با تشکیل شرط دنباله هندسی خواهیم داشت:

$$(\Delta + a)^2 = (2 + a)(9 + a) \Rightarrow 2\Delta + a^2 + 10a = 18 + 2a + a^2 + 9a \\ \Rightarrow 2\Delta + 10a = 18a + 18 \Rightarrow a = 7$$

و جملات عبارت از ۱۶، ۱۲ و ۹ بوده و $q = \frac{4}{3} = \frac{12}{9}$ می‌گردد.

(حتمی) (پایه دهم - فصل اول - درس چهارم - دنباله - دنباله هندسی) (متوسط)

۲- گزینه «۱» - با تعیین علامت نامعادله داریم:

$$\frac{x^2 - x}{x + 3} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
y	-	0	+	-	+

تنها اعداد صحیح نامنفی یعنی واقع در مجموعه اعداد حسابی، اعداد $\{0, 1\}$ هستند.

(حتمی) (پایه دهم - فصل چهارم - درس سوم - نامعادله - نامعادله) (متوسط)

۳- گزینه «۲» - ابتدا دانش‌آموزان را در یک دسته قرار داده و با ۳ معلم می‌توانند به ۴! در کنار یکدیگر باشند و جایگشت سه دانش‌آموز نیز برابر ۳! خواهد بود و داریم:

$$4 \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

(حتمی) (پایه دهم - فصل ششم - درس اول - شمارش - جایگشت) (متوسط)

۴- گزینه «۳» - مقطع تحصیلی بیانگر کیفی ترتیبی است.

(حتمی) (پایه دهم - فصل هفتم - درس سوم - آمار - انواع و متغیرها) (آسان)

۵- گزینه «۲» - می‌توان نوشت:

$$2(x + y) = 64 \Rightarrow x + y = 32 \Rightarrow y = 32 - x$$

$$S = xy \Rightarrow S = x(32 - x) = 32x - x^2$$

$$S = -x^2 + 32x$$

حال در معادله درجه دوم که داریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-32}{-2} = 16 \Rightarrow f(y) = 16 \Rightarrow S = xy = (16)^2$$

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل اول - درس دوم - معادله درجه دوم - بهینه سازی) (متوسط)

۶- گزینه «۴» - می‌بایستی $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3$ باشد که با جایگزینی $x = 5$ یا حل معادله آن به جواب می‌رسیم.

(حتمی) (پایه یازدهم و دوازدهم - فصل سوم و اول - درس دوم و سوم - تابع وارون - تابع وارون) (متوسط)

۷- گزینه «۴» - با تبدیل کمان‌ها داریم:

$$2 \sin(3\pi - \alpha) = +2 \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = +\cos \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$4 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = -4 \sin \alpha$$

$$A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{-\cos \alpha + 4 \sin \alpha} \xrightarrow{+ \cos \alpha} A = \frac{2 \tan \alpha + 1}{-1 + 4 \tan \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha = 2} A = \frac{5}{7}$$

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مثلثات - نسبت‌های مثلثاتی) (متوسط)

۸- گزینه «۴» -

$$\log_2 x(x-1) = \log_2 (1-x^2) \Rightarrow x^2 - x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

که چون $x_1 = 1$ و $x_2 = -\frac{1}{2}$ ریشه‌های معادله در معادله لگاریتمی صدق نمی‌کنند غیرقابل قبول بوده و معادله فاقد ریشه حقیقی است.

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل پنجم - درس دوم - توابع نمایی و لگاریتمی - معادله لگاریتمی) (متوسط)

۹- گزینه «۱» -

$$p = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{11}$$

(حتمی) (پایه دهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال - احتمال) (متوسط)

۱۰- گزینه «۱» - تابع در بازه $(-4, 1)$ اکیدا صعودی بوده و طول بازه $b - a = 5$ خواهد بود.

نمودار تابع $y = |x - a| - |x - b|$ در بازه بین ریشه‌های داخل قدرمطلق اکیدا یکنوا است.

(نمودار آبشاری)

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - یکنوایی تابع - یکنوایی تابع) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» - داریم:

$$4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1 \Rightarrow 4 \sin x (-\cos x) = 1$$

می‌دانیم $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ و خواهیم داشت:

$$-2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - مثلثات - معادله مثلثاتی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» - با استفاده از قضیه تقسیم داریم:

$$f(x) = (x-2)(x+1)q(x) + 4x + 1$$

از طرفی می‌بایستی $f(2)$ و $f(-1)$ برابر باشد با:

$$f(2) = 4x + 1 = 9$$

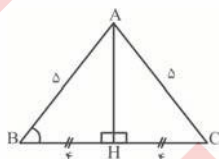
$$f(-1) = 4x + 1 = -3$$

و باقی‌مانده $g(x)$ بر $(x-1)$ برابر $g(1)$ است:

$$g(1) = f(-1) + f(2) + 1 = -3 + 9 + 1 = 7$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - بخش‌پذیری - بخش‌پذیری) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» - چون مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد، پس ارتفاع وارد بر BC همان میانه بوده و داریم:



$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{\tau}{\Delta}$$

(حتمی) (پایه دهم - فصل اول - درس اول - مثلثات - نسبت‌های مثلثاتی) (متوسط)

۱۴- گزینه «۴» - چون در دو عبارت داخل رادیکال $x - 3 \geq 0$ به $x \geq 3$ می‌رسیم و با $x \geq 3$ تا این‌جا تنها مقدار قابل قبول در دامنه مشترک $x = 3$ بوده که چون در معادله صدق نمی‌کند فاقد ریشه خواهد بود.

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل اول - درس سوم - معادله گنگ - معادله گنگ) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» -

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 36 = BH \times 10 \Rightarrow BH = 3.6$$

$$BH^2 = BH' \times AB \Rightarrow (3.6)^2 = BH' \times 6 \Rightarrow$$

$$BH' = \frac{3.6 \times 3.6}{6} = 2.16 \Rightarrow BH' = 2.16$$

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس دوم - هندسه - روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه) (متوسط)

۱۶- گزینه «۱» -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x^2 + x} = \frac{0}{0}$$

بهتر است از قاعده هسپیتال عمل کنیم:

$$H = \frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x+1}}}{2x+1} = -\frac{1}{2}$$

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل ششم - درس دوم - حد - محاسبه حد) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» -

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (1 - \frac{x}{4}) = 1 - \frac{a}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

$$f(a) = 1 - \frac{a}{4} \Rightarrow 1 - \frac{a}{4} = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل ششم - درس سوم - پیوستگی تابع - پیوستگی تابع) (متوسط)

۱۸- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x-2} = \frac{0}{0}$$

$$H = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x}{1} = 8$$

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل ششم - درس دوم - حد - محاسبه حد) (متوسط)

۱۹- گزینه «۴» - اگر داده‌های آماری را در عددی جمع کنیم واریانس تغییر نمی‌کند ولی اگر داده‌ها در عدد k ضرب شوند واریانس k^۲ برابر می‌گردد که داریم:

$$k = 3 \Rightarrow k^2 = 9$$

$$H = 9 \times 5 = 45$$

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس دوم - آمار - آمار) (متوسط)

۲۰- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - حد بی‌نهایت - حد بی‌نهایت) (متوسط)

۲۱- گزینه «۳» -

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = 6\pi \Rightarrow 3|a| = 1 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول - مثلثات - تناوب تابع) (آسان)

۲۲- گزینه «۲» - ابتدا با تفکیک کسر داریم:

$$\frac{2x+1}{2x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \left[2 - \frac{1}{x+1} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 - \frac{1}{x+1} \right] = \left[2 - \frac{1}{+\infty} \right] = \left[2 - 0^+ \right] = 2$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - حد تابع - حد در بی‌نهایت) (دشوار)

۲۳- گزینه «۲» - فضای نمونه‌ای تفاضل اعداد رو شده مضرب ۴ را می‌نویسیم:

$$B = \{(1,1)(2,2)(2,6)(3,3)(4,4)(5,1)(5,5)(6,2)(6,6)(1,5)\}$$

n(B) = ۱۰ می‌باشد و احتمال اینکه فقط یک ۲ بیاید برابر است با:

$$p(A|B) = \frac{2}{10}$$

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال - احتمال شرطی) (متوسط)

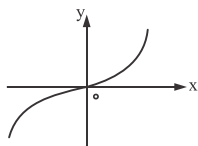
۲۴- گزینه «۱» - چون $0 \leq y < 1$ و تابع $g(x)$ تابع نمایی اکیدا صعودی است برای محاسبه برد تابع مرکب $g \circ f$ می‌توانیم مقادیر ابتدا و انتهای $0 \leq y < 1$ تابع f را در دامنه تابع g قرار دهیم:

$$g \circ f = g(f) \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 5^0 = 1 \\ g(1) = 5^1 = 5 \end{cases} \Rightarrow R = [1, 5]$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول و دوم - تابع - یکنوایی و تابع مرکب) (متوسط)

۲۵- گزینه «۳» - با توجه به نمودار تابع $h(x) = x|x|$ تابع یک به یک و وارون پذیر خواهد بود.

$$h(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - تابع وارون - تابع وارون) (متوسط)

۲۶- گزینه «۱» - ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق نقاط زاویه‌دار یا گوشه‌ای بوده و مشتق‌پذیر نمی‌باشد یعنی در $x = 1$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۲۷- گزینه «۱» - می‌بایستی تابع پیوسته و مشتق‌پذیر در نقطه $x = 2$ باشد که داریم:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4x+1} = 3 \Rightarrow f(2) = 3$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + bx) = 4a + 2b \Rightarrow 4a + 2b = 3$$

$$y'_+ = \frac{4}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow y'_+(2) = \frac{2}{3}$$

$$y'_- = 2ax + b \Rightarrow y'_-(2) = 4a + b \Rightarrow 4a + b = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 3 \\ 4a + b = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{7}{3}$$

$$b = \frac{7}{3} \Rightarrow 4a + \frac{7}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 4a = -\frac{5}{3} \Rightarrow a = -\frac{5}{12}$$

(سراسری با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری - مشتق‌پذیری، پیوستگی) (متوسط)

۲۸- گزینه «۲» -

$$f'(x) = \frac{y}{(3-x)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{y}{(3-2)^2} = y$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{g(a) - g(2)}{a - 2} = \frac{2a^2 - 2a - 2}{a - 2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{2a^2 - 2a - 2}{a - 2} + 1 \Rightarrow 2a^2 - 9a + 1 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } \frac{5}{2}$$

که با توجه به بازه $[2, a]$ فقط $a = \frac{5}{2}$ قابل قبول است.

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس سوم - مشتق - آهنگ متوسط و لحظه‌ای) (متوسط)

۲۹- گزینه «۳» -

$$2r + h = 9 \Rightarrow h = 9 - 2r$$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (9 - 2r) = \pi (9r^2 - 2r^3)$$

$$V' = \pi (18r - 6r^2) = 0 \Rightarrow 18r - 6r^2 = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ یا } r = 3$$

که فقط $r = 3$ قابل قبول می‌باشد.

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس دوم - کاربرد مشتق - بهینه‌سازی) (متوسط)

۳۰- گزینه «۴» -

$$f(x) = x - \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - مشتق - اکسترم‌های تابع) (متوسط)