حسابان

۱- گزینه «۴» ـ

$$۲x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases}\Delta=۴+۸\times۳=۲۸\\ S=\alpha+\beta=۱\\ p=\alpha\beta=-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$|\alpha^۳-\beta^۳|=|\alpha-\beta||\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}|s^۲-۲p+p|=\frac{\sqrt{۲۸}}{۲}|(۱)^۲-(\frac{-۳}{۲})|=\sqrt{۷}\times\frac{۵}{۲}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ روابط بین ریشه‌ها)

۲- گزینه «۱» ـ اگر دنباله هندسی مورد نظر را t_n فرض کنیم.

$$t_۷+۶t_۴=۱۶t_۱ \Rightarrow t_۱r^۶+۶t_۱r^۳=۱۶t_۱ \xrightarrow{\div t_۱} r^۶+۶r^۳-۱۶=۰ \Rightarrow (r^۳-۲)(r^۳+۸)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}r^۳=۲ \Rightarrow r=\sqrt[۳]{۲}\in Q'\\ r^۳=-۸ \Rightarrow r=-۲\in Q\end{cases}, \frac{t_{۱۰}}{t_۷}=r^{۱۰-۷}=r^۳=۲$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس چهارم ـ دنباله هندسی)

۳- گزینه «۳» ـ باید سهمی و خط نقطه برخوردی نداشته باشند.

$$\frac{x^۲}{۲}-\frac{x}{۳}+\frac{k}{۲}=۳-x \xrightarrow{\times۶} ۳x^۲-۲x+۳k=۱۸-۶x \Rightarrow ۳x^۲+۴x+۳k-۱۸=۰$$

$$\Delta=(۴)^۲-۴(۳)(۳k-۱۸)<۰ \Rightarrow ۱۲(۳k-۱۸)>۱۶ \Rightarrow ۳k-۱۸>\frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳k>۱۸+\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow k>۶+\frac{۴}{۹} \Rightarrow k>۶\frac{۴}{۹}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ سهمی)

۴- گزینه «۳» ـ دنباله را به‌صورت $t_n=An^۲+Bn+C$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases}t_۲=۴A+۲B+C=۶\\ t_۴=۱۶A+۴B+C=۲۸\\ t_۵=۲۵A+۵B+C=۴۵\end{cases} \xrightarrow{-} \begin{cases}۱۲A+۲B=۲۲\\ ۹A+B=۱۷\end{cases}$$

$$-۲\begin{cases}۱۲A+۲B=۲۲\\ ۹A+B=۱۷\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۱۲A+۲B=۲۲\\ -۱۸A-۲B=-۳۴\end{cases} \xrightarrow{+} -۶A=-۱۲ \Rightarrow A=۲, B=-۱۰, C=۰ \Rightarrow t_n=۲n^۲-n$$

$$t_{۱۰}=۲\times۱۰^۲-۱۰=۲۰۰-۱۰=۱۹۰$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ دنباله درجه دوم)

۵- گزینه «۲» ـ

$$x=\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲x=۱-\sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۳}=۱-۲x \Rightarrow (\sqrt{۳})^۲=(۱-۲x)^۲ \Rightarrow ۳=۱-۴x+۴x^۲ \Rightarrow ۴x^۲-۴x=۲ \Rightarrow ۲x^۲-۲x=۱$$

$$A=\frac{(۲)(۲+۱)}{(۱)}=۶$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس چهارم ـ اتحادها)

۶- گزینه «۲» ـ

$$x=\frac{۱}{۴-\sqrt{۱۵}}=\frac{۴+\sqrt{۱۵}}{(۴-\sqrt{۱۵})(۴+\sqrt{۱۵})}=۴+\sqrt{۱۵} \Rightarrow ۲x=۸+۲\sqrt{۱۵}=۸+\sqrt{۶۰}$$

$$A=[x]+[۲x]=[۴+\sqrt{۱۵}]+[۸+\sqrt{۶۰}]=۴+[\sqrt{۱۵}]+۸+[\sqrt{۶۰}]=۱۲+۳+۷=۲۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ تابع جزء صحیح)

۷- گزینه «۱» ـ

$$-xf(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \leq 0 \Rightarrow xy \leq 0 \quad (1)$$

رابطه (۱) نشان می‌دهد که x و y مختلف العلامت و یا یکی از آن‌ها صفر است. یعنی نقاط برخورد با محورها و نقاطی که در ناحیه دوم و چهارم واقع هستند جواب سوال است. با توجه به صورت سوال برای xهای صحیح منفی فقط $x = -2$ جواب مسئله است.

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ دامنه تابع)

۸- گزینه «۳» ـ تابع نمایی a^x برای $0 < a < 1$، اکیداً نزولی است. پس:

$$0 < \frac{k-1}{3} < 1 \xrightarrow{\times 3} 0 < k-1 < 3 \xrightarrow{+1} 1 < k < 4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تابع یکنوا)

۹- گزینه «۳» ـ

$$f = \{(0,1),(1,2),(2,3),(-1,0)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(0,0),(1,1),(2,2),(-1,-1)\}$$

$$g = \{(0,-1),(1,1),(2,3),(-1,-3)\}$$

$$x \xrightarrow{f^{-1}} (f^{-1})(x) \xrightarrow{g} g((f^{-1})(x)) = (go(f^{-1}))(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \xrightarrow{f^{-1}} 0 \xrightarrow{g} -1 \\ 1 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{g} 1 \\ 2 \xrightarrow{f^{-1}} 2 \xrightarrow{g} 3 \\ -1 \xrightarrow{f^{-1}} -1 \xrightarrow{g} -3 \end{array}\right\} \Rightarrow go(f^{-1}) = \{(0,-1),(1,1),(2,3),(-1,-3)\}$$

برد تابع مورد نظر $\{-3, 3, 1, -1\}$ است. (نصیری) (پایه دهم ـ درس دوازدهم ـ ترکیب توابع)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_2 x + 1 = -\log_2 \frac{1}{x+4} \Rightarrow \log_2 x - \log_2 (x+4) = -1 \Rightarrow \log_2 \frac{x}{x+4} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = x+4 \Rightarrow x = 4$$

$$f(4) = \log_2 4 + 1 = 3$$

پس نقطه برخورد $A(4,3)$ است.

$$|OA| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ معادله لگاریتمی)

۱۱- گزینه «۱» ـ

$$4\cos^4 x + \frac{3}{4}(2\sin x \cos x)^2 = \sin^4 x \Rightarrow 4\cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x = \sin^4 x$$

طرفین رابطه بالا را بر $\cos^4 x$ تقسیم می‌کنیم.

$$4 + 3\tan^2 x = \tan^4 x \Rightarrow \tan^4 x - 3\tan^2 x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan^2 x = -1 \quad (\text{غ ق ق}) \\ \tan^2 x = 4 \end{cases}$$

$$\tan^2\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = \cot^2 x = \frac{1}{4}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ روابط و متمم‌ها)

۱۲- گزینه «۱» ـ فرض می‌کنیم $\hat{AEF} = \beta$ باشد. در مثلث AEF داریم:

$$\tan\beta = \frac{۳}{۲}$$

در مثلث AED داریم:

$$\tan(\alpha+\beta) = ۲$$

پس:

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta} = ۲ \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\frac{۳}{۲}}{۱-\frac{۳}{۲}\tan\alpha} = ۲ \Rightarrow ۲-۳\tan\alpha = \tan\alpha+\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۴\tan\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۱}{۸}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس چهارم ـ روابط مجموع)

۱۳- گزینه «۱» ـ

$$\sin ۴x(۱+\tan^۲ x) = ۴\tan x$$

$$۲\sin ۲x\cos ۲x = \frac{۴\tan x}{۱+\tan^۲ x} \Rightarrow \sin ۲x\cos ۲x = \sin ۲x \Rightarrow \sin ۲x(\cos ۲x-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} & (۱) \\ \cos ۲x = ۱ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \Rightarrow x = k\pi & (۲) \end{cases}$$

اجتماع جواب‌های به‌دست آمده $\frac{k\pi}{۲}$ است که تنها عضو آن در بازه $(۰ , \pi)$ عدد $\frac{\pi}{۲}$ است که این عدد هم در معادله صدق نمی‌کند زیرا در دامنه آن قرار ندارد. پس معادله جوابی ندارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۴- گزینه «۱» ـ

$$f(x) = -\sin x\cos x(\cos^۴ x-\sin^۴ x) = -\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x = -\frac{۱}{۴}\sin ۴x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ دروس اول و دوم)

۱۵- گزینه «۴» ـ چون حد مخرج کسر صفر است پس باید حد صورت کسر نیز صفر شود.

$$\lim_{x\to ۴}(a+۱+\sqrt{x}) = ۰ \Rightarrow a+۱+۲ = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x\sqrt{x}-۸} = \lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{(\sqrt{x}-۲)(x+۲\sqrt{x}+۴)} = \lim_{x\to ۴}\frac{۱}{x+۲\sqrt{x}+۴} = \frac{۱}{۱۲}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس چهارم ـ حد $\frac{۰}{۰}$)

۱۶- گزینه «۴» ـ با توجه به اینکه حاصل حد $+\infty$ شده است پس باید مخرج ریشه مضاعف $x = ۲$ داشته باشد، از طرفی چون ضریب $x^۲$ برابر ۳ است پس باید مخرج به‌صورت $۳(x-۲)^۲$ باشد.

$$۳(x-۲)^۲ = ۳(x^۲-۴x+۴) = ۳x^۲-۱۲x+۱۲ \quad (۱)$$

با مقایسه رابطه (۱) و مخرج کسر $b = -۱۲ , c = ۱۲$ به‌دست می‌آید.

$$\lim_{x\to ۱۲}\frac{b-c}{(x-c)^۲} = \lim_{x\to ۱۲}\frac{-۲۴}{(x-۱۲)^۲} = -\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول)

۱۷- گزینه «۴» ـ فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$ باشد. با توجه به اطلاعات مسئله:

$$\begin{cases} f(۰)=-۱ \Rightarrow b=-۱ \\ f(۲)=۰ \Rightarrow ۲a-۱=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}x-۱$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f(x-۱)}{xf(۲x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{۱}{۲}x-۱)(\frac{۱}{۲}(x-۱)-۱)}{x(\frac{۱}{۲}(۲x)-۱)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{۱}{۲}x)\times(\frac{۱}{۲}x)}{x\times x}=\frac{۱}{۴}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ حد در بی‌نهایت)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=a\times[۴^+]-[-۳(۲^+)]=۴a+۷$$

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=a[۴^-]-[-۳(۲^-)]=۳a+۶$$

چون تابع در $x=۲$ حد دارد پس باید حد چپ و راست با هم برابر باشند.

$$۴a+۷=۳a+۶ \Rightarrow a=-۱$$

$$\lim_{x\to۲^+}[ax]=\lim_{x\to۲^+}[-x]=-۳$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس سوم ـ حد تابع جزء صحیح)

۱۹- گزینه «۳» ـ

$$f(۱)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=b+۱،\ \lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^+}b[\frac{۴}{x}]=۳b$$

چون f در $x=۱$ پیوسته است.

$$b+۱=۳b \Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}b[\frac{۴}{x}]=b[\frac{۴}{۲^+}]=\frac{۱}{۲}[۲^-]=\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱}{۲}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس پنجم ـ پیوستگی)

۲۰- گزینه «۳» ـ نقطه A را به‌صورت $A(x,\sqrt{x})$ در نظر می‌گیریم:

$$x\sqrt{x}=۸ \Rightarrow (\sqrt{x})^۳=۸ \Rightarrow \sqrt{x}=۲ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow A(۴,۲)$$

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۴}$$ (شیب خط مماس)

$$\text{خط مماس}: y-۲=\frac{۱}{۴}(x-۴) \xrightarrow{y=۰} -۸=x-۴ \Rightarrow x=-۴$$

پس طول نقطه C برابر ۴- است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ خط مماس)

۲۱- گزینه «۳» ـ ضابطه $f'(x)$ را حساب می‌کنیم.

$$f(x)=x\sqrt[۳]{۱-x} \Rightarrow f'(x)=\sqrt[۳]{۱-x}-\frac{x}{۳\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}$$

$$\lim_{x\to۱}f'(x)=۰-\frac{۱}{۳\times۰^+}=-\infty$$

پس $f'(x)$ در همسایگی $x=۱$ به‌صورت خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ عدم وجود مشتق)

۲۲- گزینه «۱» ـ

$$f(x)=\frac{۱}{x+۱} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{(x+۱)^۲}$$

$$y=fof(x) \Rightarrow y'=f'(x)f'(f(x)) \Rightarrow y'(۰)=f'(۰)f'(f(۰)) \Rightarrow y'(۰)=(-۱)f'(۱)=-\frac{-۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق تابع مرکب)

۲۳- گزینه «۳» ـ

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}}=\frac{۱}{\sqrt{\sqrt[۳]{x^۴}}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{x^۴}} \xrightarrow{x>۰} f(x)=x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}} \Rightarrow f''(x)=\frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۸}{۳}} \Rightarrow f''(۱)=\frac{۱۰}{۹}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ محاسبه مشتق)

۲۴- گزینه «۲» ـ

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow V'=۴\pi r^۲ \Rightarrow V'(a)=۴\pi a^۲=۱۶\pi \Rightarrow a=۲$$

$$S=۴\pi r^۲ \Rightarrow S'=۸\pi r \Rightarrow S'(۲)=۱۶\pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ آهنگ لحظه‌ای)