حسابان

۱- گزینه «۴» ـ اگر در سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ و $\frac{c}{a} < ۰$ باشد، آن سهمی از هر چهار ناحیه مختصات عبور می‌کند.

$$\frac{۷+\frac{m}{۲}}{۲m} < ۰ \Rightarrow \frac{۱۴+m}{۴m} < ۰ \Rightarrow -۱۴ < m < ۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ معادله و جبر ـ سهمی ساده)

۲- گزینه «۳» ـ محل برخورد ضلع AC و ارتفاع BH جواب مسئله است. معادله AC را می‌نویسیم.

$$m_{AC} = \frac{۰+۱}{۵+۴} = \frac{۱}{۹}$$

$$AC: y - ۰ = \frac{۱}{۹}(x - ۵) \Rightarrow ۹y = x - ۵ \qquad (۱)$$

BH بر AC عمود است. پس شیب BH برابر ۹- خواهد بود.

$$BH: y - ۵ = -۹(x - ۰) \Rightarrow y = ۵ - ۹x \qquad (۲)$$

خط‌های (۲) و (۱) را قطع می‌دهیم:

$$۹(۵ - ۹x) = x - ۵ \Rightarrow -۸۱x - x = -۵ - ۴۵ \Rightarrow -۸۲x = -۵۰ \Rightarrow x = \frac{۲۵}{۴۱}$$

$$y = ۵ - ۹x = ۵ - ۹ \times \frac{۲۵}{۴۱} = \frac{۲۰۵ - ۲۲۵}{۴۱} = \frac{-۲۰}{۴۱}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ معادله و جبر ـ هندسه تحلیلی)

۳- گزینه «۱» ـ در نامعادله $|۲x^{۲} - ۱| < x$ باید $x > ۰$ باشد.

$$|۲x^{۲} - ۱| < x \xrightarrow{x>۰} |۲x^{۲} - ۱| < |x| \Rightarrow (۲x^{۲} - ۱ - x)(۲x^{۲} - ۱ + x) < ۰ \Rightarrow (۲x^{۲} - x - ۱)(۲x^{۲} + x - ۱) < ۰$$
$$\Rightarrow \underbrace{(x-۱)(۲x+۱)(x+۱)(۲x-۱)}_{p(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		-۱		$-\frac{۱}{۲}$		$\frac{۱}{۲}$		۱		$+\infty$
p(x)		+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	

$$p(x) < ۰ \xrightarrow{(x>۰)} \frac{۱}{۲} < x < ۱$$

(نصیری) (پایه دهم ـ نامعادله ـ نامعادله قدرمطلقی)

۴- گزینه «۲» ـ

$$f(x) = a + ۱ + b^{x}$$
$$f(۱) = ۲ \Rightarrow a + ۱ + b = ۲ \Rightarrow a + b = ۱$$
$$f(۲) = ۴ \Rightarrow a + ۱ + b^{۲} = ۴ \Rightarrow a + b^{۲} = ۳$$

تفاضل دو رابطه بالا را بدست می‌آوریم:

$$b^{۲} - b = ۲ \xrightarrow{b>۰} b = ۲ \xrightarrow{a+b=۱} a = -۱ \Rightarrow f(x) = ۲^{x}$$
$$f(\log_{۲} ۳) = ۲^{\log_{۲} ۳} = ۳$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ نمایی و لگاریتمی ـ قوانین لگاریتم)

۵- گزینه «۴» ـ

$$y = \frac{۲^{۲x} + ۱}{۲^{۲x}} = ۱ + \frac{۱}{۲^{۲x}} \Rightarrow ۲^{۲x} = \frac{۱}{y - ۱} \Rightarrow ۲x = \log_{۲} \frac{۱}{y - ۱} = -\log_{۲}(y - ۱) \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}\log_{۲}(y - ۱)$$
$$= -\log_{۲} \sqrt{y - ۱} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\log_{۲} \sqrt{x - ۱}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ نمایی و لگاریتمی ـ وارون تابع نمایی)

۶- گزینه «۳» ـ

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\tan ۲x) = \frac{۴\tan ۲x}{۱+\tan^{۲} ۲x} = \frac{۴\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}}{\frac{۱}{\cos^{۲} ۲x}}$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = ۴\sin ۲x \cos ۲x = ۲\sin ۴x \Rightarrow (fog)(\frac{\pi}{۱۶}) = ۲\sin\frac{\pi}{۴} = ۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ نسبت‌های ۲α)

۷- گزینه «۳» ـ

$$\tan ۲\alpha = \tan(\alpha+\beta+\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)} = \frac{۳+۴}{۱-۳\times۴} = -\frac{۷}{۱۱}$$

$$\cot ۲\alpha = \frac{۱۱}{-۷}$$

$$\tan ۲\alpha + \cot ۲\alpha = \frac{-۷}{۱۱} - \frac{۱۱}{۷} = \frac{-۱۲۱-۴۹}{۷۷} = \frac{-۱۷۰}{۷۷}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ مجموع و تفاضل)

۸- گزینه «۱» ـ چون دوره تناوب $f(x)$ برابر ۸ است پس:

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(۳-۲f(۱-۴x)) \Rightarrow T = \frac{۸}{|-۴|} = ۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب)

۹- گزینه «۱» ـ در $\lim\limits_{x\to۹}\frac{p(x+۱)}{x^{۲}-۹x}$ حد مخرج صفر است، پس باید حد صورت نیز صفر شود.

$$\lim_{x\to۹} P(x+۱) = ۰ \Rightarrow P(۱۰) = ۰$$

باقیمانده $Q(x) = xP(x) - ۲x^{۲} + ۵$ بر $x-۱۰$ برابر $Q(۱۰)$ است.

$$Q(۱۰) = ۱۰P(۱۰) - ۲\times۱۰۰ + ۵ = ۵ - ۲۰۰ = -۱۹۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد $\frac{۰}{۰}$)

۱۰- گزینه «۴» ـ با انتخاب $x = ۳^{۲n}$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۳^{۲n}\times۳^{۲} - ۳^{-۲n}\times۳^{۳}}{۲\times۳^{۱}\times۳^{۲n} + ۳^{-۲n}\times۳^{-۱}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{۹n - \frac{۲۷}{n}}{۶n+\frac{۱}{۳n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{۹n}{۶n} = \frac{۹}{۶} = \frac{۳}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت)

۱۱- گزینه «۴» ـ

$$۳x+۶ = ۰ \Rightarrow x = -۲$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{۳x+۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}$$

پس نقطه مورد نظر $A(-۲,\frac{۲}{۳})$ است.

$$x_A + y_A = -۲ + \frac{۲}{۳} = -\frac{۴}{۳}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ حد ـ مجانب)

۱۲- گزینه «۳» ـ چون $f(x)$ عامل $x-۲$ دارد پس:

$$f(x)=\frac{(x-۲)(۲x-۱)}{\sqrt{۲x}}=(x-۲)\times\frac{۲x-۱}{\sqrt{۲x}}$$
$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{-(x-۲)}=-\lim_{x\to ۲}\frac{۲x-۱}{\sqrt{۲x}}=-\frac{۳}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق)

۱۳- گزینه «۲» ـ f در $x=۴$ پیوسته است.

$$f(۴)=\lim_{x\to ۴}f(x)\ \Rightarrow\ ۱۶a+۶۴=b+۲\ \Rightarrow\ b=۱۶a+۶۲$$

مشتق چپ و راست f در $x=۴$ برابر است

$$f'(x)=\begin{cases}۲ax+۳x^۲ & x<۴\\ \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} & x\geq ۴\end{cases}$$

$$f'_+(۴)=f'_-(۴)\ \Rightarrow\ ۸a+۴۸=\frac{۱}{۴}\ \xrightarrow{\times ۴}\ ۳۲a+۴۸\times ۴=۱\ \Rightarrow\ ۳۲a=-۱۹۱$$
$$b=۱۶a+۶۲=\frac{-۱۹۱}{۲}+۶۲\ \xrightarrow{\times ۲}\ ۲b=-۱۹۱+۱۲۴\ \Rightarrow\ ۲b=-۶۷$$
$$۳۲a+۲b=-۱۹۱-۶۷=-۲۵۸$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری)

۱۴- گزینه «۱» ـ خواسته مسئله $f''(\frac{\pi}{۲})$ است.

$$f(x)=\cos^۴x-\sin^۴x=(\cos^۲x-\sin^۲x)(\cos^۲x+\sin^۲x)=\cos ۲x$$
$$\Rightarrow\ f'(x)=-۲\sin ۲x\ \Rightarrow\ f''(x)=-۴\cos ۲x\ \Rightarrow\ f''(\frac{\pi}{۲})=-۴\cos\pi=۴$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق مثلثاتی)

۱۵- گزینه «۱» ـ دامنه تابع $[۰,+\infty)$ است پس $x=۰$ نقطه بحرانی تابع $f(x)$ خواهد بود. تابع در $x=۴$ و $x=۶$ هم به دلیل ناپیوستگی بحرانی دارد. حال به بحرانی‌های ضابطه‌ها می‌پردازیم:

$$y=x^۲-۴x\ \Rightarrow\ y'=۲x-۴=۰\ \Rightarrow\ x=۲\in(۰,۴)$$

پس $x=۲$ بحرانی است.

$$y=\sqrt[۳]{x-۵}\ \Rightarrow\ (\text{نقطه بحرانی است } x=۵)$$

$$y=|x^۲-۴۹|\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=۰\notin(۶,۸)\\ x=۷\in(۶,۸)\\ x=-۷\notin(۶,۸)\end{cases}$$

پس $x=۷$ نقطه بحرانی ضابطه سوم است. در نهایت نقاط بحرانی $\{۷,۶,۵,۴,۲,۰\}$ خواهد بود.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقاط بحرانی)

۱۶- گزینه «۲» ـ

$$f(-۱)=۱۱\ \Rightarrow\ -a+b-c=۱۱\qquad (۱)$$
$$f'(x)=۳ax^۲+۲bx+c$$
$$f'(-۱)=۰\ \Rightarrow\ ۳a-۲b+c=۰\qquad (۲)$$
$$f(-۲)=۲۲\ \Rightarrow\ -۸a+۴b-۲c=۲۲\ \xrightarrow{\div ۲}\ -۴a+۲b-c=۱۱\quad (۳)$$
$$\begin{matrix}(۱)+(۲)\ \Rightarrow\\ (۲)+(۳)\ \Rightarrow\end{matrix}\begin{cases}۲a-b=۱۱\\ -a=۱۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۱۱\\ b=-۳۳\end{cases}$$
$$a+b=-۱۱-۳۳=-۴۴$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم نسبی)

۱۷- گزینه «۴» ـ مفهوم سوال این است این است که خط $y = ۲m + ۱$ از نقطه عطف تابع عبور می‌کند.

$$y = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۳x + m \Rightarrow x_{I} = \frac{-(-۶)}{۳ \times ۱} = ۲$$

$$y_{I} = f(۲) = ۸ - ۲۴ + ۶ + m = m - ۱۰$$

پس نقطه عطف $I(۲\,, m-۱۰)$ است و روی خط $y = ۲m + ۱$ قرار دارد.پس:

$$۲m + ۱ = m - ۱۰ \Rightarrow m = -۱۱ \Rightarrow y_{I} = -۲۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ عطف)