حسابان

۱- گزینه «۳» ــ توجه کنید چون $n \in \mathbb{N}$ است پس $۰ < \frac{۳n}{۳n+۱} < ۱$ خواهد بود.

$$b_n = [(-۱)^{n!} + \frac{۳n}{۳n+۱}] = (-۱)^{n!} + [\frac{۳n}{۳n+۱}] = (-۱)^{n!}$$

$$b_۱ + b_۲ + \cdots + b_{۱۰۰} = -۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \cdots + ۱ = -۱ + ۹۹ = ۹۸$$

$$a_n = [\frac{۲n(-۱)^n}{۲n+۱}] = \begin{cases} [\frac{۲n}{۲n+۱}] & \text{زوج } n \\ [\frac{-۲n}{۲n+۱}] & \text{فرد } n \end{cases}$$

جملات ردیف فرد دنباله a_n برابر ۱- و جملات ردیف زوج آن برابر صفر است.

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۱۰۰} = ۵۰(-۱) + ۵۰(۰) = -۵۰$$

بنابراین مجموع صد جمله دنباله c_n برابر ۴۸ است. (نصیری) (پایه دهم ــ دنباله) (دشوار)

۲- گزینه «۲» ــ

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{x}+۲)^۲}\,(\sqrt{x}-۲)(x+۴)}{x^۲-۱۶} = \frac{(\sqrt{x}+۲)(\sqrt{x}-۲)(x+۴)}{(x-۴)(x+۴)} = \frac{x-۴}{x-۴} = ۱$$

(نصیری) (پایه دهم ــ اتحاد) (ساده)

۳- گزینه «۴» ــ با توجه به نمودار $a > ۰$، $b < ۰$، $c < ۰$ و $\Delta > ۰$ است.

$$c < ۰ \Rightarrow c^۴ > ۰ \xrightarrow[abc>۰]{a>۰\,,\,b<۰} c^۴ + abc > ۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ جبر و معادله ــ سهمی) (متوسط)

۴- گزینه «۱» ــ چون S_n مربوط به دنباله حسابی است، پس $m = ۰$ خواهد بود.

$$S_n = \frac{n^۲ + ۲n}{۳} \Rightarrow S_۱ = a_۱ = ۱$$

$$d = ۲ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$d = t_{n+۱} - t_n = \frac{۲}{۳} \Rightarrow t_{n+۱} = t_n + \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}(\frac{۳}{۲}t_n + ۱)$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ دنباله ــ مجموع جملات دنباله حسابی) (دشوار)

۵- گزینه «۳» ــ

$$\sqrt{۳}\sin(\frac{۱۲\pi}{۳} - \frac{\pi}{۳}) = \sqrt{۳}\sin(-\frac{\pi}{۳}) = \sqrt{۳} \times \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = -\frac{۳}{۲}$$

$$\sqrt{۲}\cos\frac{۱۷\pi}{۴} = \sqrt{۲}\cos(\frac{۱۶\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۴} = ۱$$

$$A = -\frac{۳}{۲} + ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

$$\cos^۲\frac{A\pi}{۲} = \cos^۲(-\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۲}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ مثلثات ــ تغییر زاویه) (ساده)

۶- گزینه «۲» ـ

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=2 \Rightarrow \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=2 \Rightarrow 2+2\tan\alpha=1-\tan\alpha \Rightarrow 3\tan\alpha=-1 \Rightarrow \tan\alpha=-\frac{1}{3}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$$

$$\tan 3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan\alpha}=\frac{-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{1-\frac{-3}{4}\times -\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{13}{12}}{1-\frac{3}{12}}=-\frac{13}{9}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات – تانژانت مجموع دو زاویه) متوسط

۷- گزینه «۱» ـ

$$y=f(x)=3^{1-x}+2 \Rightarrow y-2=3^{1-x} \Rightarrow 1-x=\log_3(y-2) \Rightarrow x=1-\log_3(y-2)=\log_3 3-\log_3(y-2)$$

$$=\log_3\frac{3}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_3\frac{3}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ m=2 \end{cases} \Rightarrow km=6$$

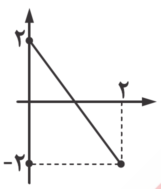
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تابع وارون) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ دامنه دو تابع f و g با هم برابرند.

$$D_f=D_g=\{x \mid x\geq 0\}\cap\{x \mid 2-x\geq 0\}=[0,2]$$

$$y=(fg)(x)=f(x)g(x)=(2-x)-(x)=2-2x$$

پس جواب مسئله نمودار تابع خطی $y=2-2x$ در فاصله $[0,2]$ است.



(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ اعمال تابع) (ساده)

۹- گزینه «۱» ـ

$$x-2>0 \Rightarrow x>2$$

$$\log_2(x-2)>0 \Rightarrow x-2>2^0 \Rightarrow x>3$$

اشتراک بازه‌های به‌دست آمده دامنه تابع است.

$$D=(2,+\infty)\cap(3,+\infty)=(3,+\infty)$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ لگاریتم ـ دامنه لگاریتم) (ساده)

۱۰- گزینه «۱» ـ

$$\cos^2 2x-\cos^2 x=\sin^2 2x-\sin^2 x \Rightarrow \cos^2 2x-\sin^2 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \cos 4x=\cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 4x=2k\pi+2x \Rightarrow x=k\pi \\ 4x=2k\pi-2x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

اجتماع جواب‌های به‌دست آمده $\frac{k\pi}{3}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی) (ساده)

۱۱- گزینه «۱» ـ

$$f(1)=-11 \Rightarrow 1+4-8+m=-11 \Rightarrow m=-8$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{[\frac{x}{2}]+x-3}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+4x^2-8x-8}{1+x-3}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2+6x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x^2+6x+4)=20$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد $\frac{0}{0}$) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2 \Rightarrow \frac{a+1}{a}=2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+x}$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x^2-1}{x(x+1)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x^2-1}{x(x+1)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حدبی‌نهایت) (متوسط)

۱۳- گزینه «۳» ـ

$$2x-\sqrt{x^2+3x}=0 \Rightarrow \sqrt{x^2+3x}=2x \Rightarrow x^2+3x=4x^2 \Rightarrow 3x^2-3x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

فاصله دو خط مجانب قائم برابر ۱ است. (نصیری) (حسابان۲) (حد – مجانب قائم) متوسط

۱۴- گزینه «۲» ـ در همسایگی چپ $x=2$ داریم:

$$f(x)=(4-x^2)[-(2^-)]=2x^2-8 \Rightarrow f'(x)=4x \Rightarrow f'_-(2)=8$$

پس شیب نیم مماس چپ برابر ۸ و نقطه تماس $(2\,,0)$ است.

خط مماس: $y-0=8(x-2) \Rightarrow y+16=8x$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق یک طرفه) (ساده)

۱۵- گزینه «۲» ـ خواسته مسئله $f'(2)$ است.

$$f'(x)=\frac{2\times\dfrac{-9-2}{(x-3)^2}}{3\sqrt[3]{\dfrac{3x+2}{x-3}}} \Rightarrow f'(2)=\frac{2\times(-11)}{3\times(-2)}=\frac{11}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (متوسط)

۱۶- گزینه «۱» ـ

$$f'(x)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2-1}=3 \Rightarrow 3x^2-3=x^2 \Rightarrow x^2=\frac{3}{2} \xrightarrow{1\le x\le 2} x=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ آهنگ تغییر) (ساده)

۱۷- گزینه «۳» ـ از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$(1+f'(x))(1+\tan^2(x+f(x)))=(2+f'(x))\cos(2x+f(x)) \xrightarrow{x=0} (1+f'(0))(1+\tan^2(\pi))$$

$$=(2+f'(x))\cos\pi \Rightarrow 1+f'(0)=-2-f'(0) \Rightarrow f'(0)=-\frac{3}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق توابع مثلثاتی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۱» ـ

$$y'=3x^2+2x+\frac{1}{k}\ge 0 \Rightarrow \Delta\le 0 \Rightarrow 4-4(3)(\frac{1}{k})\le 0 \Rightarrow 1-\frac{3}{k}\le 0 \Rightarrow \frac{k-3}{k}\le 0 \Rightarrow 0<k\le 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ یکنوایی تابع) (متوسط)

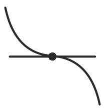
۱۹- گزینه «۱» ـ

$$x^2=3-y \Rightarrow A=y^3(3-y)^2$$

$$A'=3y^2(3-y)^2-2(3-y)y^3=0 \Rightarrow y^2(3-y)(9-3y-2y)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow A=0 \\ y=3 \Rightarrow A=0 \\ y=\dfrac{9}{5}=1/8 \Rightarrow A=\max \end{cases}$$

مقدار $y=1/8$ قابل قبول است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بهینه سازی) (متوسط)

۲۰- گزینه «۴» ـ توضیحات سؤال نشان می‌دهد که نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:



پس تابع باید به فرم $-۳(x-۲)^۳+\alpha$ باشد.

$$-۳(x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸)+\alpha=-۳x^۳+۱۸x^۲-۳۶x+۲۴+\alpha$$

پس $c=-۳۶$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ یکنوایی) دشوار

۲۱- گزینه «۱» ـ اگر $x\ge ۱$ باشد:

$$y=x^۳-۳x+۳ \Rightarrow y'=۳x^۲-۳\ge ۰ \Rightarrow x^۲\ge ۱ \Rightarrow |x|\ge ۱ \xrightarrow{x\ge ۱} x\ge ۱$$

اگر $x<۱$ باشد:

$$y=x^۳+۳(x-۱)=x^۳+۳x-۳ \Rightarrow y'=۳x^۲+۳>۰ \Rightarrow x\in\mathbb{R} \xrightarrow{x<۱} x<۱$$

پس تابع روی کل $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ یکنوایی) (دشوار)

۲۲- گزینه «۳» ـ منظور مسئله نقطه عطف تابع است.

$$-\frac{a}{۳}=۲ \Rightarrow a=-۶ \Rightarrow f(x)=x^۳-۶x^۲+x+b \Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۱ \Rightarrow f'(۱)=۳-۱۲+۱=-۸$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق – نقطه عطف) (متوسط)