

## حسابان

۱- گزینه «۱» - دنباله غیر خطی یک دنباله مثلثی با جمله عمومی  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$  بوده و برای

جمله بیستم به  $a_{20} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$  می‌رسیم و در دنباله خطی نیز خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_4 = 13 \\ a_{10} = 25 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{25-13}{10-4} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow a_n = 2n + b$$

$$a_4 = 13 \Rightarrow 13 = 8 + b \Rightarrow b = 5 \Rightarrow a_n = 2n + 5 \Rightarrow a_{20} = 45$$

بنابراین  $165 = 45 + 210$ ؛ اختلاف جملات بیستم در هر دو دنباله خواهد بود.

(حتمی) (پایه دهم - فصل اول - درس سوم - الگو و دنباله‌ها - الگوها) (متوسط)

۲- گزینه «۳» -

$$\Delta ABC: \tan \alpha = \frac{12}{AM + 7}$$

$$\Delta ABM: \tan \alpha = \frac{AM}{12} \Rightarrow \frac{AM}{12} = \frac{12}{AM + 7}$$

$$\Rightarrow AM^2 + 7AM = 144 \Rightarrow AM^2 + 7AM - 144 = 0$$

$$\Rightarrow (AM - 9)(AM + 16) = 0 \Rightarrow AM = 9 \quad \text{قابل قبول}$$

(حتمی) (پایه دهم - فصل دوم - درس اول - مثلثات - نسبت‌های مثلثاتی) (متوسط)

۳- گزینه «۲» - راس سهمی به مختصات  $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$  می‌باشد:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-m}{2}, \Delta = m^2 + 1$$

$$S \quad \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(m^2 + 1)}{4}$$

$$y = x \Rightarrow \frac{-m}{2} = \frac{-(m^2 + 1)}{4} \Rightarrow m^2 + 1 = 2m \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = 1 \Rightarrow y = x^2 + x - \frac{1}{4} \quad \text{معادله سهمی}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1+1}}{1} = \sqrt{2}$$

(حتمی) (پایه دهم - فصل چهارم - درس دوم - سهمی - سهمی) (متوسط)

۴- گزینه «۱» - ابتدا از ۵ شهر می‌بایستی سه شهر را انتخاب نموده و از هر یک از شهرها یک

دانش‌آموز انتخاب کنیم که داریم:

$$\left(\frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{4}{1}\right) \times \left(\frac{4}{1}\right) \times \left(\frac{4}{1}\right) \times 1 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

(حتمی) (پایه دهم - فصل ششم - درس اول - شمارش - شمارش) (آسان)

۵- گزینه «۴» -

$$D: y = 2x + 3 \Rightarrow A \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 3 \end{cases}, D': x + 2y - 1 = 0$$

$$AH = \frac{|\alpha + 4\alpha + 6 - 1|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5} \Rightarrow |\Delta\alpha + 5| = 5$$

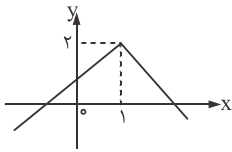
$$\begin{cases} \Delta\alpha + 5 = 5 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \Delta\alpha + 5 = -5 \Rightarrow \Delta\alpha = -10 \Rightarrow \alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow A_1(0, 3), A_2(-2, -1)$$

$$\Rightarrow A_1A_2 = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل اول - درس پنجم - هندسه تحلیلی - هندسه تحلیلی) (متوسط)

۶- گزینه «۱» - با توجه به جدول تعیین علامت یا نمودار تابع می‌توان به بازه اکیدا صعودی

تابع که  $x < 1$  می‌باشد رسید.



$$x < 1 \Rightarrow y = 2 + (x-1) = x+1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x-1, x \in (-\infty, 2)$$

(دامنه تابع وارون یعنی  $x < 2$  همان برد تابع  $f$  در بازه  $x < 1$  خواهد بود.)

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس سوم - تابع - تابع وارون) (متوسط)

۷- گزینه «۲» - با حل معادله لگاریتمی خواهیم داشت:

$$\log(3x-1) - \log\sqrt{x+1} = \log 4 \Rightarrow \log \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}} = \log 4$$

$$\Rightarrow \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}} = 4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (3x-1)^2 = 16(x+1) = 9x^2 - 6x + 1 = 16x + 16$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 22x - 15 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -\frac{5}{9}$$

که فقط  $x = 3$  قابل قبول بوده و  $\log_9^x = \log_9^3 = \frac{1}{3}$  می‌باشد.

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل سوم - درس سوم - لگاریتم - معادله لگاریتمی) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - می‌توان نوشت:

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\frac{6\pi + \pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل چهارم - درس دوم و چهارم - مثلثات - نسبت‌ها و روابط مثلثاتی) (متوسط)

۹- گزینه «۱» - می‌دانیم در همسایگی محذوف  $x = 0$ ؛  $[-x] + [x] = -1$  می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{از طرفی } 1 - \cos^3 u \approx \frac{3}{2} u^2 \text{ و } 1 - \cos^m u \approx \frac{m}{2} (u)^2 \text{ می‌باشد.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2} x^2}{\frac{3}{2} \sqrt{1+x^2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow H = \frac{-3x}{2\sqrt{1+x^2}} = 3$$

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل پنجم - درس چهارم - حد تابع - محاسبه حد توابع کسری) (دشوار)

۱۰- گزینه «۳» - مجموعه جواب نامعادله قدرمطلق  $|x^3| > x^2$  به صورت  $x < -1, x > 1$

می‌باشد و تابع  $f$  در این بازه در بی‌شمار نقطه ناپیوسته خواهد بود.

(نقاطی که عبارت داخل براکت برابر یک عدد صحیح باشند.)

(حتمی) (پایه یازدهم - فصل پنجم - درس پنجم - پیوستگی تابع - پیوستگی تابع) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» -

$$x^2 f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 3 & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & - \end{array}$$

$\{1, 2, 3\}$  اعداد طبیعی

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - تابع - تابع یکنوا) (متوسط)

۱۸- گزینه «۳» - می‌توانیم از  $f'(3) = 0$  عمل کنیم یا اینکه در معادله تقاطع با خط  $y = 3$  شرایط ریشه مضاعف ( $\Delta = 0$ ) را بررسی کنیم که در این روش داریم:

$$\frac{x}{x^2 + a} = 3 \Rightarrow 3x^2 + 3a = x \Rightarrow 3x^2 - x + 3a = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 1 - 36a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{36}$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - مشتق - اکسترمم مطلق تابع) (متوسط)

۱۹- گزینه «۴» -

$$M(r, \theta), A(x, y) \Rightarrow AM = \sqrt{(x-r)^2 + y^2}$$

$$AM = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4x} = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$$

$$(AM)' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AM = \sqrt{1 - 2 + 9} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - کاربردهای مشتق - بهینه‌سازی) (متوسط)

۲۰- گزینه «۳» - با محاسبه مشتق دوم داریم:

$$y = (x + \delta)x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + \delta x^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\delta x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{9}\delta x^{-\frac{4}{3}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \Rightarrow x = 1$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس دوم - کاربرد مشتق - نقطه عطف تابع) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» - فاصله بین دو نقطه A و B همان تناوب تابع  $f(x)$  یعنی  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  و ارتفاع

رسم شده از نقطه C بر ضلع AC همان فاصله بین max و min تابع یعنی  $2a^2$  خواهد بود که داریم:

$$S = \frac{\frac{2\pi}{a} \times 2a^2}{2} = \frac{2\pi \times 2a}{2} = 2\pi \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول - مثلثات - تناوب و نمودار تابع مثلثاتی) (دشوار)

۱۳- گزینه «۴» -

$$\frac{\cos 2x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos 2x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x + \cos x \Rightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x - \sin x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - مثلثات - معادلات مثلثاتی) (دشوار)

۱۴- گزینه «۳» - می‌بایستی مخرج در  $x = 3$  ریشه مضاعف داشته باشد که داریم:

$$\text{مخرج} = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 = x^2 - ax + b$$

$$\Rightarrow a = 6, b = 9 \Rightarrow a + b = 6 + 9 = 15$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - حد نامتناهی - حد نامتناهی) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» - خط مجانب افقی تابع همان حد در بی‌نهایت تابع و برابر  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$

یعنی  $y = 2$  خواهد بود. با تفکیک کسر داریم:

$$\frac{2x - 3x + |x^2 + x|}{x^2 - 2x + 2x} = \frac{-\Delta x + 1}{-\Delta x + 1}$$

$$\Rightarrow y = 2 + \frac{-\Delta x + 1}{x^2 + x} \approx 2 - \frac{\Delta}{x}$$

$$x \rightarrow +\infty: y = 2 - \frac{\Delta}{+\infty} = 2^- < 2 \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow -\infty: y = 2 - \frac{\Delta}{-\infty} = 2^+ > 2$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - حد در بی‌نهایت - حد در بی‌نهایت) (متوسط)

۱۶- گزینه «۲» -

$$\text{آهنگ متوسط: } \frac{f(\Delta) - f(2)}{\Delta - 2} = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{2}}{\Delta - 2} = \frac{\frac{2 - \Delta}{2\Delta}}{\Delta - 2} = \frac{2 - \Delta}{2\Delta(\Delta - 2)} = \frac{1}{2\Delta}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای: } f'(\alpha) = \frac{2}{(\alpha+1)^2} = \frac{2}{(\alpha+1)^2} \Rightarrow \frac{2}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow (\alpha+1)^2 = 18$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس سوم - مشتق - آهنگ تغییر) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» - می‌بایستی تابع در نقطه  $x = 1$  پیوسته و مشتق‌پذیر باشد که خواهیم داشت:

$$L_2 = bx^2 + c = b + c, L_1 = f(1) = \frac{2a}{\sqrt{x}} + 3x = 2a + 3$$

$$\Rightarrow b + c = 2a + 3 \Rightarrow 2a - b = 3$$

$$y'_- = 2bx = 2b, y'_+ = \frac{-2a(\frac{1}{\sqrt{x}})}{x} + 3 = -\frac{a}{x\sqrt{x}} + 3 \Rightarrow -\frac{a}{\Delta} + 3 = 2b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ -a - 2b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{9}{5}, b = \frac{3}{5} \Rightarrow a - b = \frac{6}{5} = 1.2$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق - مشتق‌پذیری) (متوسط)