هندسه

۱- گزینه «۲» ــ درایه‌های ماتریس $\mathbf{A}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\mathbf{A}^2-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=2\mathbf{I}$$

$\mathbf{A}^2-\mathbf{A}$ مجموع درایه‌های = $2\mathbf{I}$ مجموع درایه‌های = ۶

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس اول ــ ضرب ماتریس‌ها)

۲- گزینه «۴» ــ ابتدا ماتریس $\mathbf{A}^{-1}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{9-8}\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}$$

اکنون از برابری $\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{I}=\mathbf{A}^{-1}$ به‌دست می‌آید:

$$\alpha\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3\alpha+\beta&2\alpha\\4\alpha&3\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha=-2\Rightarrow\alpha=-1\\3\alpha+\beta=3\xrightarrow{\alpha=-1}\beta=6\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=6-1=5$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس دوم ــ وارون ماتریس)

۳- گزینه «۳» ــ ابتدا دترمینان ماتریس داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&0&5\\-2&6&1\end{vmatrix}\overset{\text{بسط نسبت به}}{\underset{\text{ستون دوم}}{=\!=\!=\!=}}1(3+10)-6(10-12)=13+12=25$$

اکنون به درایه سطر سوم ستون دوم دو واحد اضافه می‌کنیم و دترمینان جدید را به‌دست می‌آوریم:

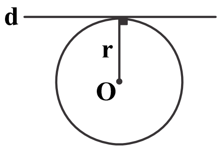
$$\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&0&5\\-2&8&1\end{vmatrix}\overset{\text{بسط نسبت به}}{\underset{\text{ستون دوم}}{=\!=\!=\!=}}1(3+10)-8(10-12)=13+16=29$$

در نهایت میزان تغییرات به‌دست می‌آید:

میزان تغییرات $=29-25=4$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس دوم ــ دترمینان)

۴- گزینه «۱» ــ چون خط بر دایره مماس است، پس فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است.



$$۲x^۲+۲y^۲-۳x+y=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}y=۰$$

در نتیجه:

$$\text{مرکز دایره} = O = (\frac{۳}{۴}, -\frac{۱}{۴})$$

$$\text{شعاع دایره}: r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$$

اکنون فاصله مرکز دایره تا خط $y+۳x=m$ را برابر شعاع دایره قرار می‌دهیم:

$$\frac{|-\frac{۱}{۴}+\frac{۹}{۴}-m|}{\sqrt{۱+۹}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \Rightarrow \frac{|۲-m|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \Rightarrow |۲-m|=\frac{۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲-m=\frac{۵}{۲} \\ ۲-m=-\frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-\frac{۱}{۲} \\ m=\frac{۹}{۲} \end{cases}$$

در نهایت به‌دست می‌آید:

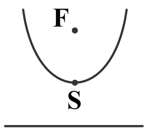
$$\text{مجموع مقادیر } m = \frac{۹}{۲}-\frac{۱}{۲}=۴$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ درس دوم ــ خط مماس بر دایره)

۵- گزینه «۲» ــ معادله سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$۲(x^۲-۲x)=my \Rightarrow ۲(x^۲-۲x+۱)=my+۲ \Rightarrow ۲(x-۱)^۲=my+۲ \Rightarrow (x-۱)^۲=\frac{m}{۲}(y+\frac{۲}{m})$$

چون $m>۰$، نتیجه می‌گیریم دهانه سهمی رو به بالا است.



$$S=(۱,-\frac{۲}{m})=(h,k)$$

$$۴a=\frac{m}{۲} \Rightarrow a=\frac{m}{۸}$$

$$\text{معادله خط هادی}: y=k-a=-\frac{۲}{m}-\frac{m}{۸}$$

بنابر فرض $y=-۱$ خط هادی است. بنابراین:

$$\frac{۲}{m}+\frac{m}{۸}=۱ \Rightarrow ۱۶+m^۲=۸m \Rightarrow m^۲-۸m+۱۶=۰$$

یعنی $m=۴$.

کانون این سهمی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

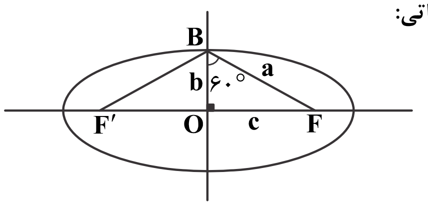
$$F=\left|\begin{array}{l} h=۱ \\ k+a=-\frac{۲}{m}+\frac{m}{۸}=۰ \end{array}\right.$$

در نهایت به‌دست می‌آید:

$$|FA|=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ درس سوم ــ اجزای سهمی)

۶- گزینه «۱» ــ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. در مثلث OBF بنابر نسبت‌های مثلثاتی:



$$\sin ۶۰° = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=e$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ درس سوم ــ بیضی ــ خروج از مرکز)

۷- گزینه «۱» ـ می‌دانیم:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \quad , \quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \quad , \quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

اکنون عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$(\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k})+\vec{i}-\vec{j}\times\vec{k})\times\vec{k}=\left(\vec{i}\times\vec{i}+\vec{i}-\vec{i}\right)\times\vec{k}=\vec{o}\times\vec{k}=\vec{o}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب خارجی)

هندسه ۱ و ۲

۱- گزینه «۱» ـ (۱) از تقاطع نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی یک مستطیل به ضلع‌های a و b یک مربع به طول ضلع‌های $|a-b|\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ به‌دست می‌آید.

پس:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(a-b)^{۲}$$

(۲) از وصل کردن اوساط اضلاع مستطیل، یک لوزی به‌دست می‌آید که مساحت آن، نصف مساحت مستطیل اولیه است. یعنی:

$$S_{MNOP}=\frac{۱}{۲}ab$$

(۳) اکنون از (۱) و (۲) و فرض مسئله به‌دست می‌آید:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNOP}}=\frac{\frac{۱}{۲}(a-b)^{۲}}{\frac{۱}{۲}ab}=۴ \Rightarrow \frac{a^{۲}+b^{۲}-۲ab}{ab}=۴ \Rightarrow (\frac{a}{b})+(\frac{b}{a})-۲=۴ \Rightarrow (\frac{a}{b})+(\frac{b}{a})=۶$$

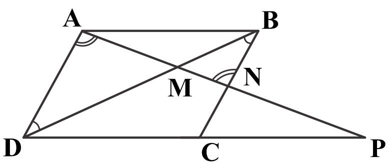
فرض می‌کنیم $\frac{a}{b}=t$، در نتیجه:

$$t+\frac{۱}{t}=۶ \xrightarrow{\times t} t^{۲}+۱=۶t \Rightarrow t^{۲}-۶t+۱=۰ \Rightarrow t=\frac{a}{b}=۳\pm ۲\sqrt{۲} \xrightarrow[\text{را می خواهد باید } t>۱]{\text{چون نسبت طول بـه عـرض}} \frac{a}{b}=۳+۲\sqrt{۲}$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ شکل حاصل از برخورد نیم‌سازها و وسط ضلع‌ها)

۲- گزینه «۳» ـ بنابر قضیه اساسی تشابه دو مثلث MAD و MNB متشابه هستند. با نوشتن نسبت تشابه به‌دست می‌آید:

$$\frac{MA}{MN}=\frac{MD}{MB} \quad (۱)$$



با استدلالی مشابه دو مثلث MAB و MPD متشابه هستند. با نوشتن نسبت تشابه به‌دست می‌آید:

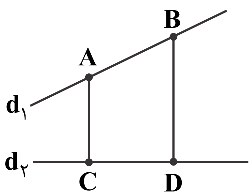
$$\frac{MD}{MB}=\frac{MP}{MA} \quad (۲)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{MA}{MN}=\frac{MP}{MA} \Rightarrow MP\times MN=MA^{۲} \xrightarrow{MA=۲} MP\times MN=۲^{۲}=۴$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ قضیه اساسی تشابه)

۳- گزینه «۲» ـ ثابت می‌کنیم AC و BD متنافر هستند.



برهان خلف. فرض می‌کنیم AC و BD متنافر نباشند.

(فرض خلف). دو حالت رُخ می‌دهد:

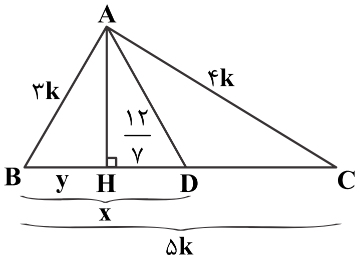
AC و BD موازی هستند یا این‌که AC و BD متقاطع هستند. در هر دو حالت صفحه‌ای شامل AC و BD وجود دارد (این صفحه را P می‌نامیم).

چون A و B در صفحه P هستند پس خط $d_۱$ در این صفحه است و از طرف دیگر چون C و D در صفحه P هستند، پس $d_۲$ هم در P قرار دارد.

این مطلب با متنافر بودن $d_۱$ و $d_۲$ در تناقض است (چون دو خط متنافر نمی‌توانند در یک صفحه قرار گیرند.)

در نتیجه AC و BD نه موازی و نه متقاطع‌اند، یعنی AC و BD متنافرند. (هویدی) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ خط‌های متنافر)

۴- گزینه «۳» ــ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه.



$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow BC = ۵K$$

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۹K^۲ = y \times ۵K \Rightarrow y = \frac{۹}{۵}K$$

از طرف دیگر بنابر قضیه نیم‌ساز داخلی می‌توان نوشت:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x}{DC} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{x}{BC} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow \frac{x}{۵K} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۷}K$$

اکنون می‌نویسیم:

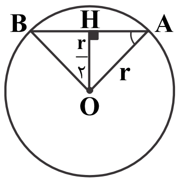
$$DH = x - y = \frac{۱۵}{۷}K - \frac{۹}{۵}K = \frac{۱۲}{۳۵}K \xrightarrow[DH=\frac{۱۲}{۷}]{\text{بنابر فرض مسئله}} \frac{۱۲}{۳۵}K = \frac{۱۲}{۷} \Rightarrow K = ۵$$

در نهایت به‌دست می‌آید:

طول وتر $= BC = ۵K = ۲۵$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل سوم ــ دروس اول و سوم ــ قضیه نیم‌سازها و روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه)

۵- گزینه «۳» ــ (۱) در شکل روبه‌رو، چون در مثلث قائم‌الزاویه OAH، $OH = \frac{r}{۲}$ و $OA = r$ پس $\hat{A} = ۳۰^\circ$ و در نتیجه:

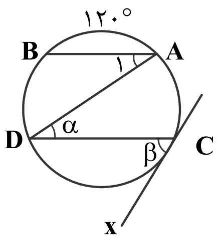


$$A\hat{O}B = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \overparen{AB} = ۱۲۰^\circ$$

(۲) چون $AB \parallel CD$ و AD مورب است پس:

$$\hat{A}_۱ = \hat{D} = \alpha$$

و چون این دو زاویه محاطی هستند نتیجه می‌گیریم:



$$\overparen{AC} = \overparen{BD} = ۲\alpha$$

(۳) زاویه DCx زاویه ظلی است:

$$\overparen{DC} = ۲\beta$$

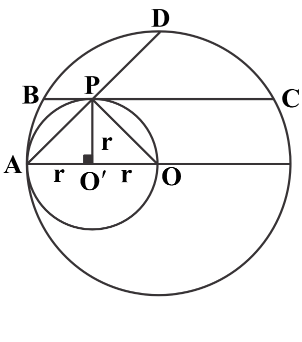
(۴) در نهایت می‌نویسیم:

$$\overparen{AB} + \overparen{BD} + \overparen{DC} + \overparen{CA} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۲۰^\circ + ۲\alpha + ۲\beta + ۲\alpha = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + \beta = ۱۲۰^\circ$$

$$\xrightarrow[\beta=۳\alpha]{\text{بنابر فرض}} ۲\alpha + ۳\alpha = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۴^\circ \Rightarrow \overparen{BD} = ۲\alpha = ۴۸^\circ$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ درس اول ــ زاویه‌ها در دایره)

۶- گزینه «۲» ــ (۱) از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که دایره کوچک از مرکز دایره بزرگ می‌گذرد. زاویه P در دایره کوچک، زاویه محاطی روبه‌رو به قطر است $\hat{P} = ۹۰^\circ$ در نتیجه OP، AD را نصف می‌کند.



(۲) بنابر روابط طولی در دایره:

$$PB \times PC = PA \times PD \xrightarrow{PA=PD} PB \times PC = PA^۲$$

(۳) مثلث $O'AP$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس:

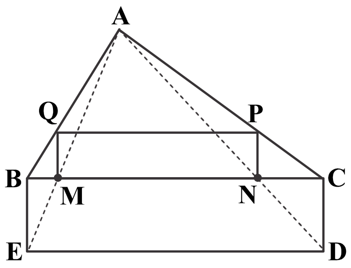
$$AP = \sqrt{۲}r$$

(۴) اکنون از (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l} PB \times PC = ۲r^۲ \\ PB \times PC = ۱۸ \quad \text{بنابر فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow ۲r^۲ = ۱۸ \Rightarrow r = ۳$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ درس دوم ــ روابط طولی در دایره)

۷- گزینه «۴» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. روی ضلع BC مستطیل BCDE را طوری بنا می‌کنیم که در آن طول دو برابر عرض است. محل برخورد AE و AD با ضلع BC را به‌ترتیب M و N می‌نامیم. از M و N عمودهایی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را به‌ترتیب در Q و P قطع کنند. چهارضلعی MNPQ مجانس مستطیل EDCB به مرکز تجانس A است. پس با آن متشابه است. یعنی مستطیل MNPQ، مستطیل موردنظر است. در نتیجه برای رسم از تجانس استفاده می‌کنیم.



(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تبدیلات هندسی)

۸- گزینه «۴» ـ قطر BD را با قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABD به‌دست می‌آوریم:

$$BD = \sqrt{AD^۲ + AB^۲} = \sqrt{۱۳ + ۱۶} = \sqrt{۲۹}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCD می‌توان نوشت:

$$BD^۲ = CD^۲ + CB^۲ - ۲CD \times CB \times \cos\alpha \Rightarrow ۲۹ = ۱۶ + ۲۵ - ۲ \times ۴ \times ۵ \times \cos\alpha$$

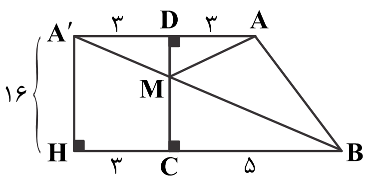
$\cos\alpha = \frac{۳}{۱۰}$ به‌دست می‌آید.

اکنون با نسبت‌های مثلثاتی به‌دست می‌آید:

$$\sin\alpha = \sqrt{۱ - \cos^۲\alpha} = \sqrt{۱ - \frac{۹}{۱۰۰}} = \frac{\sqrt{۹۱}}{۱۰}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ قضیه کسینوس‌ها)

۹- گزینه «۴» ـ بنابر مسئله هرون بازتاب A را نسبت به ساق CD به‌دست می‌آوریم (A' در شکل) محل برخورد BA' با ساق CD را M می‌نامیم و این نقطه‌ای است که $MA + MB$ می‌نیمم می‌شود. دقت کنید که در این حالت $MA + MB = A'B$. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث $A'HB$،



$$A'B = \sqrt{A'H^۲ + BH^۲} = \sqrt{۱۶^۲ + ۸^۲} = ۸\sqrt{۵}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ اثبات به وسیله تبدیلات ـ مسئله هرون)