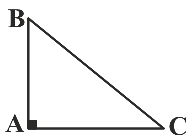
هندسه

۱- گزینه «۲» ـ چون محل همرسی عمودمنصف‌ها روی یک ضلع است، پس این مثلث قائم‌الزاویه است و BC وتر آن است. اکنون می‌توان نوشت:



$$ABC \text{ محیط} = ۳BC$$
$$AB + AC + BC = ۳BC$$
$$AB + AC = ۲BC$$

دو طرف این برابری را به توان ۲ می‌رسانیم:

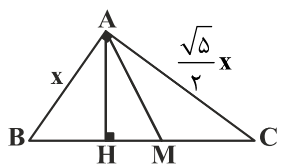
$$\underbrace{AB^۲ + AC^۲}_{BC^۲} + ۲AB \times AC = ۴BC^۲ \Rightarrow AB \times AC = \frac{۳}{۲}BC^۲$$

از طرف دیگر می‌دانیم $S = \frac{۱}{۲}AB \times AC$، پس:

$$S = \frac{۳}{۴}BC^۲$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ فصل اول: استدلال و ترسیم ـ ویژگی‌های اجرای فرعی، عمودمنصف) (دشوار)

۲- گزینه «۴» ـ بنابر قضیه فیثاغورس:



$$BC = \sqrt{AB^۲ + AC^۲} = \frac{۳}{۲}x$$

از طرف دیگر:

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow x^۲ = BH \times \frac{۳}{۲}x \Rightarrow BH = \frac{۲}{۳}x$$

در نتیجه:

$$MH = BM - BH = \frac{۳}{۴}x - \frac{۲}{۳}x = \frac{۱}{۱۲}x$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{\frac{۱}{۲}AH \times BC}{\frac{۱}{۲}AH \times MH} = \frac{BC}{MH} = \frac{\frac{۳}{۲}x}{\frac{۱}{۱۲}x} = ۱۸$$

(سراسری خارج از کشور ـ ۸۹) (پایه دهم ـ فصل دوم: تالس و تشابه ـ کاربردهای تشابه دو مثلث) (آسان)

۳- گزینه «۲» ـ بنابر رابطه پیک $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$، اکنون بنابر فرض مسئله:

$$۲/۵S = \frac{(b-۴)}{۲} + (i+۸) - ۱ \Rightarrow ۲/۵S = (\underbrace{\frac{b}{۲} + i - ۱}_{S}) + ۶ \Rightarrow ۲/۵S = S + ۶$$

$$\Rightarrow S = ۴ \Rightarrow \frac{b}{۲} + i - ۱ = ۴ \Rightarrow \frac{b}{۲} + i = ۵$$

چون تعداد نقاط مرزی حداقل برابر ۳ است، پس:

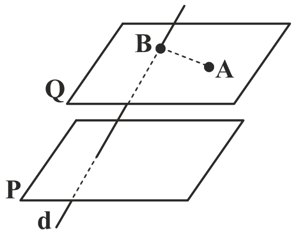
$$b - ۴ \geq ۳ \Rightarrow b \geq ۷$$

با جایگذاری مقادیر مورد قبول برای b به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} b = ۸ \\ i = ۱ \end{cases}, \begin{cases} b = ۱۰ \\ i = ۰ \end{cases}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ قضیه پیک) (متوسط)

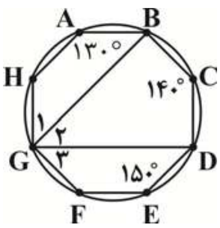
۴- گزینه «۴» ـ از نقطه A صفحه Q را موازی P رسم می‌کنیم. در صورتی شرط مسئله برقرار است که خط d، صفحه Q را قطع کند.



(سراسری خارج از کشور ـ ۹۸) (پایه دهم ـ فصل چهارم: تجسم فضایی ـ وضع خط و صفحه) (متوسط)

۵- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم، که در آن قطرهای BG و GD را رسم کرده‌ایم. سه چهارضلعی محاطی به‌دست می‌آید: $ABGH$، $GBCD$ و $GDEF$.

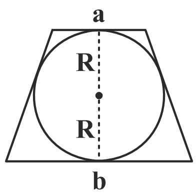
می‌دانیم در چهارضلعی‌های محاطی مجموع زوایای مقابل ۱۸۰° است، در نتیجه:



$$\begin{cases} \hat{G}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ = ۵۰^\circ \\ \hat{G}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۴۰^\circ \\ \hat{G}_۳ = ۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ = ۳۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{G} = ۵۰^\circ + ۴۰^\circ + ۳۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ چهارضلعی‌های محاطی) (متوسط)

۶- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. ارتفاع ذوزنقه برابر $۲R = ۶$ است. چون چهارضلعی محیطی است، پس:



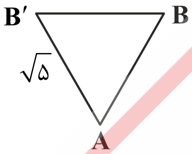
$$a + ۶ = \text{نصف محیط} = \frac{۴۸}{۲} = ۲۴$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۲R \times (a+b) = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۲۴ = ۷۲$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ چهارضلعی محیطی) (آسان)

۷- گزینه «۳» ـ بنابر ویژگی دوران:



$$AB = AB' = \sqrt{۵}$$

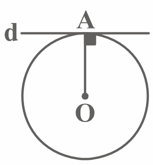
همچنین:

$$BB' = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

در نتیجه مثلث ABB' متساوی‌الاضلاع است و $\hat{A} = ۶۰^\circ$، پس زاویه دوران ۶۰° است.

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ دوران) (آسان)

۸- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس:



$$m_d = -\frac{۱}{m_{OA}} = -\frac{۱}{\frac{۳-۱}{۲-۱}} = -\frac{۱}{۲} \quad (\text{مرکز دایره } O(۱,۱))$$

اکنون با معلوم بودن شیب و مختصات A می‌توان معادله خط مماس را نوشت:

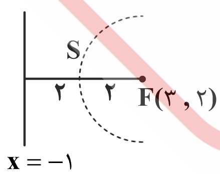
$$d: y - ۳ = -\frac{۱}{۲}(x-۲)$$

برای پیدا کردن محل برخورد خط مماس با محور yها باید $x = ۰$ را با خط قطع دهیم:

$$\xrightarrow{x=۰} y - ۳ = ۱ \Rightarrow y = ۴$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ خط مماس بر دایره) (آسان)

۹- گزینه «۴» ـ ابتدا کانون و خط هادی را رسم می‌کنیم. از روی شکل و به سادگی به‌دست می‌آید:



$$S = (۱, ۲)$$

اکنون معادله سهمی را می‌نویسیم:

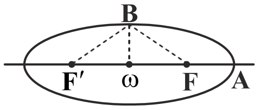
$$(y-۲)^۲ = ۸(x-۱) \xrightarrow{y=۰} A(\frac{۳}{۲}, ۰)$$

در نتیجه:

$$|AF| = \sqrt{(\frac{۳}{۲} - ۳)^۲ + (۰ - ۲)^۲} = ۲/۵$$

(سراسری ـ ۹۴) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ سهمی) (آسان)

۱۰- گزینه «۱» ــ بیش‌ترین مساحت را مثلث BFF' دارد و مقدار مساحت برابر:



$$S=\frac{۱}{۲}\times ۲c\times b=b\times c \quad (۱)$$

است. اکنون به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l} e=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲a=۳c \\ AF=a-c=۳ \Rightarrow ۲a-۲c=۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=۹ \\ c=۶ \end{cases} \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} b=\sqrt{۸۱-۳۶}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

بنابراین طبق رابطه (۱)، $S=۱۸\sqrt{۵}$. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ بیضی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» ــ پس از محاسبه به‌دست می‌آید:

$$A^۲=\bar{O} \Rightarrow \forall k\geq ۲: A^k=\bar{O}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$(A^۲+A)(A+I)^۳=(\bar{O}+A)(A^۳+۳A^۲+۳A+I)=(\bar{O}+A)(\bar{O}+۳\times\bar{O}+۳A+I)=A(۳A+I)=۳A^۲+A=۳\times\bar{O}+A=A$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ ضرب ماتریس‌ها) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» ــ از برابری‌های داده شده به‌دست می‌آید:

$$A^۳=۳A \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}A^۳=۳A^{-1}A \Rightarrow A^۲=۳I$$

$$B^۴=۹B \xrightarrow{\times B^{-1}} B^{-1}B^۴=۹B^{-1}B \Rightarrow B^۳=۹I$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$(A^{-1})^۲+(B^{-1})^۳=(A^۲)^{-1}+(B^۳)^{-1}=(۳I)^{-1}+(۹I)^{-1}=\frac{۱}{۳}I+\frac{۱}{۹}I=\frac{۴}{۹}I$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ وارون ماتریس) (آسان)

۱۳- گزینه «۱» ــ می‌توان نوشت:

$$\text{عبارت}=\frac{|A-I|}{|A^۲-I|}=\frac{|A||A-I|}{|A||A^۲-I|}=\frac{|A||A-I|}{|A^۳-A|}=\frac{|A||A-I|}{|I-A|}=\frac{|A||A-I|}{|A-I|}=|A|$$

از طرف دیگر از $A^۳=I$ به‌دست می‌آید:

$$|A|^۳=۱ \Rightarrow |A|=۱$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر ۱ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ دترمینان) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» ــ به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=۰$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ ضرب داخلی) (دشوار)