گسسته

۱- گزینه «۴» ـ ابتدا عددهای موجود در عبارت را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$۹۸۰ = ۲^۲ \times ۵ \times ۷^۲ \quad , \quad ۷۲۸ = ۲^۳ \times ۷ \times ۱۳$$

$$۱۱۹ = ۷ \times ۱۷ \quad , \quad ۲۳۸ = ۲ \times ۷ \times ۱۷$$

اکنون با توجه به این نکته که «ب.م.م حاصل‌ضرب عوامل مشترک با کمترین توان و ک.م.م حاصل‌ضرب عوامل مشترک با بیشترین توان در عوامل غیرمشترک با هر توانی که دارد»

می‌توان حاصل این عبارت را به‌دست آورد:

$$[(۹۸۰ , ۷۲۸) , [۱۱۹ , ۲۳۸]] = [(۲^۲ \times ۵ \times ۷^۲ , ۲^۳ \times ۷ \times ۱۳) , [۷ \times ۱۷ , ۲ \times ۷ \times ۱۷]]$$

$$= [۲^۲ \times ۷ , ۲ \times ۷ \times ۱۷] = ۲^۲ \times ۷ \times ۱۷ = ۴۷۶$$

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ب.م.م و ک.م.م)

۲- گزینه «۳» ـ فرض کنید $d = (۱۳n + ۲ , ۵n + ۱)$. می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} d \mid ۵n + ۱ \\ d \mid ۱۳n + ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid ۱۳(۵n + ۱) \\ d \mid ۵(۱۳n + ۲) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid ۶۵n + ۱۳ \\ d \mid ۶۵n + ۱۰ \end{cases} \Rightarrow d \mid (۶۵n + ۱۳) - (۶۵n + ۱۰) \Rightarrow d \mid ۳ \xrightarrow{d \neq ۱} d = ۳$$

یعنی $۳ \mid ۵n + ۱$ پس:

$$۵n + ۱ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵n \overset{۳}{\equiv} -۱ \overset{۳}{\equiv} -۱ + ۲ \times ۳ \overset{۳}{\equiv} ۵ \xrightarrow{(۵ , ۳) = ۱} n \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow n = ۳k + ۱$$

چون عددهای طبیعی دو رقمی را می‌خواهیم، پس:

$$۱۰ \le n = ۳k + ۱ \le ۹۹ \Rightarrow ۳ \le k \le ۳۲$$

یعنی:

$$\text{تعداد عددهای دو رقمی} = ۳۲ - ۳ + ۱ = ۳۰$$

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ دروس دوم و سوم ـ بخش‌پذیری و هم‌نهشتی)

۳- گزینه «۳» ـ فرض کنید از گل‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی را به‌ترتیب x و y تا خرید کنیم. دراین‌صورت:

$$۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۸۴۰۰۰ \xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{به ۱۰۰۰ ساده}} ۲x + ۵y = ۸۴$$

در نتیجه:

$$۵y \overset{۲}{\equiv} ۸۴ \xrightarrow{۵ \overset{۲}{\equiv} ۱ , ۸۴ \overset{۲}{\equiv} ۰} y \overset{۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow y = ۲k$$

$y = ۲k$ را در معادله $۲x + ۵y = ۸۴$ قرار می‌دهیم:

$$۲x + ۵(۲k) = ۸۴ \Rightarrow x = -۵k + ۴۲$$

اما می‌دانیم $x \ge ۰$ و $y \ge ۰$. در نتیجه:

$$\begin{cases} -۵k + ۴۲ \ge ۰ \\ ۲k \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴۲ \ge ۵k \\ ۲k \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow ۰ \le k \le ۸$$

یعنی:

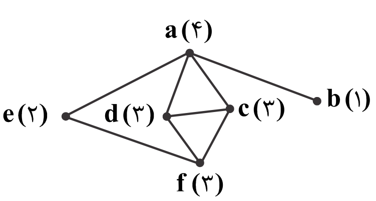
$$\text{تعداد روش‌ها} = ۸ - ۰ + ۱ = ۹$$

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات سیاله)

۴- گزینه «۳» ـ ابتدا نمودار گراف را رسم می‌کنیم. دورهای به طول ۳ در این گراف عبارتند از:

(۱) a , c , d , a

(۲) f , c , d , f



(هویدی) (گسسته ـ فصل دوم ـ درس اول ـ دور در گراف)

۵- گزینه «۱» ـ پاسخ برابر تعداد جواب‌های صحیح معادله

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۲۰$$

با شرط $x_i \geq ۳$ است.

ابتدا ۳ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل برمی‌داریم. $۵ = ۱۵ - ۲۰$ شاخه گلِ باقی‌مانده را از بین ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{cases} y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۵ \\ y_i \geq ۰ \end{cases}$$

$$\begin{matrix} n = ۵ \\ k = ۴ \end{matrix} \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۸}{۳}$$

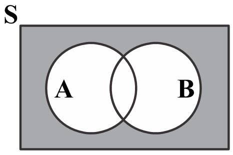
(هویدی) (گسسته ـ فصل سوم ـ درس اول ـ جایگشت با تکرار)

۶- گزینه «۳» ـ فرض کنید:

S: مجموعه کل عددهای ۴ رقمی

A: مجموعه عددهایی از S که رقم ۱ ندارند.

B: مجموعه عددهایی از S که رقم ۲ ندارند.



باید تعداد عددهایی از S را حساب کنیم که در هیچ‌یک از A و B قرار ندارند. در نتیجه پاسخ برابر است با:

$$|S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = ۵^۴ - ۴^۴ - ۴^۴ + ۳^۴ = ۶۲۵ - ۲۵۶ - ۲۵۶ + ۸۱ = ۱۹۴$$

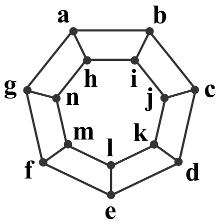
(هویدی) (گسسته ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل شمول و عدم شمول)

۷- گزینه «۳» ـ مجموعه داده شده را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم (به ۶ مجموعه افراز شده)

$\{۱, ۲, ۴, ۸\}$ ، $\{۳, ۶\}$ ، $\{۵, ۱۰\}$ ، $\{۷\}$ ، $\{۹\}$ ، $\{۱۱\}$

اگر دو عدد از یک مجموعه انتخاب شود، یکی بر دیگری بخش‌پذیر است. بنابراین بدترین حالت این است که از هر مجموعه یک عضو را طوری برداریم که هیچ دو عددی بر هم بخش‌پذیر نباشند. ولی اگر هفتمین عدد را انتخاب کنیم، حتماً دو عدد در یک دسته قرار می گیرند. بنابراین حداقل ۷ عدد نیاز داریم. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل لانه کبوتر)

۸- گزینه «۱» ـ مجموعه احاطه‌گر مینیمال، اگر کمترین تعداد عضو را داشته باشد، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است و تعداد عضوهای آن برابر احاطه‌گری است. در این گراف $n = ۱۴$ و $\Delta = ۳$ پس:



$$\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۴}{۴} \right\rceil = ۴$$

در این گراف $\{a, j, e, n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، پس عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۴ است.

(هویدی) (گسسته ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ احاطه‌گر مینیمال)

۹- گزینه «۲» ـ می‌توان با شماره‌هایی که در زیر برای اساتید قرار داده‌ایم برنامه درسی را به شکل یک ماتریس در نظر بگیریم.

معین = ۴ عباسی = ۳ کریمی = ۲ احمدی = ۱

باید x را به‌دست آوریم به‌طوری که این ماتریس یک مربع لاتین شود. x نمی‌تواند ۱ و یا ۳ باشد چون در این‌صورت در ستون ۳ درایه تکراری داریم. همچنین x نمی‌تواند ۴ باشد چون دراین‌صورت در سطر سوم درایه تکراری داریم. پس $x = ۲$ یعنی کلاس C در ساعت ۱۲ – ۱۰ با استاد کریمی کلاس دارند.

۲	۳	۱	۴
۴	۲	۳	۱
	۴	x	

(هویدی) (گسسته ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مربع لاتین)

۱۰- گزینه «۳» ــ می‌توان نوشت:

$$(A'\cap(A\cup B))\cup(B\cap(A\cup B'))=$$

(توزیع‌پذیری)

$$((A'\cap A)\cup(A'\cap B))\cup((B\cap A)\cup(B\cap B'))$$
$$=(\varnothing\cup(A'\cap B))\cup((B\cap A)\cup\varnothing)=(A'\cap B)\cup(B\cap A)$$

(جابه‌جایی)

$$=(B\cap A')\cup(B\cap A)=B\cap(A'\cup A)$$

(عکس توزیع‌پذیری)

$$=B\cap U=B$$

چون متمم این مجموعه را می‌خواهد، پس جواب برابر B' است. (هویدی) (آمار و احتمال ــ فصل اول ــ درس سوم ــ اعمال روی مجموعه‌ها)

۱۱- گزینه «۱» ــ پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

A: پیشامد شرکت کردن ایران

B: پیشامد شرکت کردن عراق

بنابر فرض مسئله $P(A)=۰/۷$ ، $P(B)=۰/۴$ و $P(A|B)=۰/۶$. از ما $P(A|B')$ را می‌خواهد. می‌نویسیم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow ۰/۶=\frac{P(A\cap B)}{۰/۴}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲۴$$

اکنون می‌نویسیم:

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{۰/۷-۰/۲۴}{۱-۰/۴}=\frac{۲۳}{۳۰}$$

(هویدی) (آمار و احتمال ــ فصل دوم ــ درس سوم ــ احتمال شرطی)

۱۲- گزینه «۲» ــ در نظر می‌گیریم:

A: پیشامد بخش‌پذیر بودن بر ۲ B: پیشامد بخش‌پذیر بودن بر ۵

از ما $A\cup B$ را می‌خواهد، به‌دست می‌آید:

$$n(S)=۶۰۰-۱۰۰=۵۰۰$$

$$n(A)=[\frac{۶۰۰}{۲}]-[\frac{۱۰۰}{۲}]=۳۰۰-۵۰=۲۵۰$$

$$n(B)=[\frac{۶۰۰}{۵}]-[\frac{۱۰۰}{۵}]=۱۲۰-۲۰=۱۰۰$$

$$n(A\cap B)=[\frac{۶۰۰}{۱۰}]-[\frac{۱۰۰}{۱۰}]=۶۰-۱۰=۵۰$$

اکنون می‌نویسیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲۵۰}{۵۰۰}+\frac{۱۰۰}{۵۰۰}-\frac{۵۰}{۵۰۰}=\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$$

(هویدی) (آمار و احتمال ــ فصل دوم ــ درس دوم ــ قوانین احتمال)

۱۳- گزینه «۱» ــ (۱) <u>میانگین وزنی</u> را با $\bar{x}_w$ نشان می‌دهیم. به‌دست می‌آید:

$$\bar{x}_w=\frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}=\frac{۷\times۸+۸\times۱۶+۹\times۲۰+۱۰\times۲۴+۱۱\times۱۲}{۸+۱۶+۲۰+۲۴+۱۲}=\frac{۷۳۶}{۸۰}=۹/۲$$

(۲) برای محاسبه میانه ابتدا تعداد داده‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$n=\text{تعداد داده‌ها}=\sum f_i=۸۰$$

چون تعداد داده‌ها زوج است پس نصف مجموع دو عددی که در وسط قرار می‌گیرند میانه است. برای مکان میانه $\frac{n+1}{۲}=\frac{۸۰+۱}{۲}=۴۰/۵$ است.

یعنی میانه بین چهل‌امین و چهل و یکمین داده است. هر دو برابر ۹ هستند. پس:

$$\text{میانه}=\frac{۹+۹}{۲}=۹$$

(۳) اکنون به‌دست می‌آید:

$$\text{میانگین}-\text{میانه}=۹/۲-۹=۰/۲$$

(هویدی) (آمار و احتمال ــ فصل سوم ــ درس دوم ــ معیارهای گرایش به مرکز ــ میانگین وزنی و میانه)

۱۴- گزینه «۱» ــ می‌نویسیم:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)) \Rightarrow \sim p \equiv \sim ((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)) \vee \sim p$$

$$\equiv \sim (\sim p \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}) \vee \sim p \equiv \sim (\sim p) \vee \sim p \equiv p \vee \sim p \equiv T$$

(هویدی) (گسسته ــ فصل اول ــ درس اول ــ جبر گزاره‌ها (منطق ریاضی))

۱۵- گزینه «۴» ــ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: عبارت $x + \frac{۱}{x}$ به‌ازای $x = ۰$ تعریف نمی‌شود. پس این گزاره نادرست است.

گزینه «۲»: به‌ازای $x = ۰$ عبارت $x^۲ - ۵x + ۶$ برابر ۶ است و چون $۶ \not\leq ۰$ پس این گزاره نادرست است.

گزینه «۳»: کافی است $x = ۲$ و $y = ۱۲$ فرض شود. دراین‌صورت $(x - ۲)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۱۰۰$ پس این گزاره هم نادرست است.

گزینه «۴»: عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^۲ - ۴}{x^۲ - ۲} = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۴ = ۲x^۲ - ۴ \Rightarrow x^۲ = ۰$$

پس به‌ازای $x = ۰$ برابری داده شده درست است. (هویدی) (گسسته ــ فصل اول ــ درس اول ــ گزاره‌های سوری)