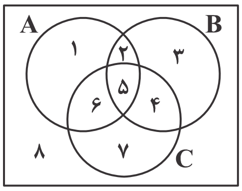
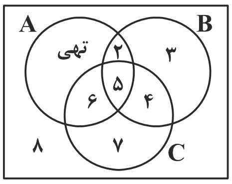
ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۳» ــ با شماره‌گذاری مجموعه‌ها می‌توان نوشت:



$$(A-B)-C=\{۱,۶\}-C=\{۱\}=\varnothing$$

اکنون نمودار جدید را در نظر می‌گیریم:

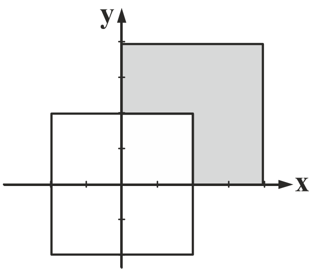


بنابراین:

$$A\subseteq B\cup C$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ جبر مجموعه‌ها)

۲- گزینه «۳» ــ نمودار مورد نظر به‌صورت مقابل است:



در این نمودار $A\times A$ مربعی به ضلع ۴ و $B\times B$ هم مربعی به ضلع ۴ است. مساحت ناحیه $A\times A-B\times A$ را هاشور زده‌ایم، بنابراین این مساحت مطلوب برابر است با:

$$۴\times۴-۲\times۲=۱۶-۴=۱۲$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ ضرب دکارتی)

۳- گزینه «۲» ــ می‌توان نوشت:

$$(P\wedge(\sim P\vee q))\vee\sim(\sim q\vee(p\wedge q))\equiv(p\wedge q)\vee\sim(\sim q\vee p)\equiv(p\wedge q)\vee(q\wedge\sim p)\equiv q\wedge(p\vee\sim p)\equiv q\wedge T\equiv q$$

(توجه کنید که $x\vee(\sim x\wedge y)=x\vee y, x\wedge(\sim x\vee y)=x\wedge y$).(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ منطق ریاضی)

۴- گزینه «۴» ــ مجموعه S را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$\{۵,۱۶\}\quad\{۶,۱۵\}\quad\{۷,۱۴\}\quad\{۸,۱۳\}\quad\{۹,۱۲\}\quad\{۱۰,۱۱\}\quad\{۱۷\}$$

اگر این مجموعه‌ها را لانه و عددهای انتخابی را کبوتر فرض کنیم به شرط اینکه تعداد لانه‌ها $<$ تعداد کبوترها، طبق اصل لانه کبوتری مجموعه دو عضوی وجود دارد که هر دو عضو آن در مجموعه انتخاب شده قرار دارد و مجموع این دو عدد برابر ۲۱ است، در نتیجه اگر $n>۷$ این اتفاق رخ می‌دهد و حداقل n برابر ۸ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ اصل لانه کبوتری)

۵- گزینه «۴» ــ دو حالت رخ می‌دهد یا هر سه عدد ظاهر شده فرد باشد یا یکی فرد و دو تای دیگر زوج باشد.

$$\underbrace{۳\times۳\times۳}_{\text{هر سه فرد باشد}}+\overset{\text{جایگاه عدد فرد}}{\overset{\uparrow}{۳}}\times\underbrace{۳\times۳\times۳}_{\text{دو تا زوج و یکی فرد}}=۴\times۲۷=۱۰۸$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ ترکیبات)

۶- گزینه «۳» ـ تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x+y+z=15$ برابر است با:

$$\binom{15-1}{3-1}=\binom{14}{2}=91$$

و مجموعه جواب‌های طبیعی معادله $x+y+z=15$ با شرط $x \geq 6$ برابر است با:

$$\binom{9}{2}=36$$

اکنون تعداد جواب‌های مطلوب را به‌دست می‌آوریم:

$$91-36=55$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ معادله سیاله خطی با ضرایب واحد و اصل شمول)

۷- گزینه «۱» ـ چون $3^2 \times 2^2 = 36$، پس باید اعداد طبیعی ۲ رقمی را پیدا کنیم که نسبت به ۲ و ۳ اول باشند.

$$\text{مجموعه اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۲} = A_1 \Rightarrow |A_1| = \left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 49-4=45$$

$$\text{مجموعه اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۳} = A_2 \Rightarrow |A_2| = \left\lfloor \frac{99}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor = 33-3=30$$

$$\text{مجموعه اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۶} = A_1 \cap A_2 \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9}{6} \right\rfloor = 16-1=15$$

بنابراین پاسخ برابر است با:

$$90-(45+30-15)=30$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ اصل شمول و عدم شمول)

۸- گزینه «۴» ـ مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای، برابر ۱ است. معادله خط به‌صورت $y=ax$ است، می‌توان نوشت:

$$P(1)+P(2)+\cdots+P(6)=1 \Rightarrow a+2a+\cdots+6a=1 \Rightarrow (1+2+\cdots+6)a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{21}$$

پس شیب خط برابر $\frac{1}{21}$ است. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ احتمال، مبانی احتمال، اصول احتمال)

۹- گزینه «۳» ـ داده‌های اولیه را با x_i و داده‌های جدید را با y_i نشان می‌دهیم. بنابر فرض:

$$y_i = 2x_i + 5 \Rightarrow \begin{cases} \bar{y} = 2\bar{x}+5 \\ \sigma_y = 2\sigma_x \end{cases}$$

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = 0/6, CV_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{2\sigma_x}{2\bar{x}+5} = 0/25$$

با تقسیم دو رابطه‌ی اخیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\frac{\delta_x}{\bar{x}}}{\frac{2\delta_x}{2\bar{x}+5}} = \frac{0/6}{0/25} \Rightarrow \frac{2\bar{x}+5}{2\bar{x}} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5} \Rightarrow 24\bar{x} = 10\bar{x}+25 \Rightarrow \bar{x} = \frac{25}{14}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ ضریب تغییرات)

۱۰- گزینه «۱» ـ چون عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس:

$$\overline{5a7b24} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 4-2+b-7+a-5 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a+b \overset{11}{\equiv} 10$$

یعنی $a+b=11k+10$. چون a و b رقم هستند، پس $0 \leq a+b \leq 18$ و در نتیجه تنها مقدار قابل قبول به ازای $k=0$ است؛ یعنی $a+b=10$.

اکنون برای به‌دست آوردن باقی‌مانده عدد بر ۹ می‌توان نوشت:

$$\overline{5a7b24} \overset{9}{\equiv} 5+a+7+b+2+4 \overset{9}{\equiv} \underbrace{a+b}_{10}+18 \overset{9}{\equiv} 28 \overset{9}{\equiv} 1$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ کاربرد هم‌نهشتی)

۱۱- گزینه «۳» ـ فرض کنید A این پیشامد باشد که رنگ دیده شده قرمز باشد و B این پیشامد باشد که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد. باید $P(B|A)$ را حساب کنیم:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=۰/۲\times۱+۰/۸\times۰/۵=۰/۶$$

اکنون طبق قانون بیز:

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{۰/۲\times۱}{۰/۶}=\frac{۱}{۳}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ قانون بیز)

۱۲- گزینه «۳» ـ احتمال مطلوب را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

P (دقیقاً سه مسابقه از پنج مسابقه را برنده شده A) = P (سه مسابقه برنده شده و دو مسابقه را باخته A)

$$=\binom{۵}{۳}\times(\frac{۲}{۳})^{۳}\times(\frac{۱}{۳})^{۲}=\frac{۸۰}{۲۴۳}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ احتمال، استقلال پیشامدها)

۱۳- گزینه «۳» ـ بنابر الگوریتم تقسیم:

$$\begin{cases}m=۲۵n+۱۴\\ ۱۴<n \quad (۱)\end{cases}$$

چون m بر ۶ بخش‌پذیر است، پس:

$$m\overset{۶}{\equiv}۰\Rightarrow ۲۵n+۱۴\overset{۶}{\equiv}۰\Rightarrow n\overset{۶}{\equiv}۴\Rightarrow n=۶k+۴ \quad (۲)$$

m عددی سه رقمی است، پس:

$$۱۰۰\le ۲۵n+۱۴\le ۹۹۹\Rightarrow ۴\le n\le ۳۹ \quad (۳)$$

از (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم:

$$۱۴<n\le ۳۹\Rightarrow ۱۴<۶k+۴\le ۳۹\Rightarrow k\in\{۲,۳,۴,۵\}$$

پس برای n چهار مقدار به‌دست می‌آید:

$$m=۴۱۴,۵۶۴,۷۱۴,۸۶۴$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ الگوریتم تقسیم، هم‌نهشتی)

۱۴- گزینه «۳» ـ اگر $(a,b)=d$، آنگاه عددهایی مانند a' و b' وجود دارند که:

$$a=a'd, b=b'd, (a',b')=۱$$

همچنین:

$$[a,b]=a'b'd$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$۱۵(a'd-b'd)=۲a'b'd\Rightarrow ۱۵(a'-b')=۲a'b'\Rightarrow\frac{a'-b'}{a'b'}=\frac{۲}{۱۵}\xrightarrow{(a',b')=۱\Rightarrow(a'-b',a'b')=۱}\begin{cases}a'-b'=۲\\ a'b'=۱۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a'=۵\\ b'=۳\end{cases}$$

در نتیجه:

$$a+b=d(a'+b')=۷\times(۵+۳)=۵۶$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ ب.م.م و ک.م.م)

۱۵- گزینه «۳» ـ به ازای هر عدد فرد n، $a+b\mid a^n+b^n$، بنابراین اگر n فرد باشد:

$$۵+۱۳\mid ۵^n+۱۳^n\Rightarrow ۱۸\mid ۵^n+۱۳^n\Rightarrow ۹\mid ۵^n+۱۳^n$$

در اعداد دو رقمی ۴۵ عدد فرد وجود دارد، بنابراین برای n، ۴۵ مقدار قابل قبول وجود دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ بخش‌پذیری)

۱۶- گزینه «۱» ـ فرض کنید نهم اردیبهشت aامین روز سال و ۲۷ دی ماه bامین روز سال باشد، در این صورت:

$$\begin{cases}a=۳۱+۹\overset{۷}{\equiv}۵\\ b=۶\times۳۱+۳\times۳۰+۲۷\overset{۷}{\equiv}۲\end{cases}$$

پس aامین روز سال مانند پنجمین روز سال است و bامین روز سال مانند دومین روز سال است. چون پنجمین روز سال پنج‌شنبه است، پس دومین روز سال دوشنبه است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ نظریه اعداد)

۱۱- گزینه «۳» ـ فرض کنید A این پیشامد باشد که رنگ دیده شده قرمز باشد و B این پیشامد باشد که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد. باید $P(B|A)$ را حساب کنیم:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=۰/۲\times۱+۰/۸\times۰/۵=۰/۶$$

اکنون طبق قانون بیز:

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{۰/۲\times۱}{۰/۶}=\frac{۱}{۳}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ قانون بیز)

۱۲- گزینه «۳» ـ احتمال مطلوب را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

P (سه مسابقه برنده شده و دو مسابقه را باخته A) $= P$ (دقیقاً سه مسابقه از پنج مسابقه را برنده شده A)

$$=\binom{۵}{۳}\times(\frac{۲}{۳})^{۳}\times(\frac{۱}{۳})^{۲}=\frac{۸۰}{۲۴۳}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ احتمال، استقلال پیشامدها)

۱۳- گزینه «۳» ـ بنابر الگوریتم تقسیم:

$$\begin{cases}m=۲۵n+۱۴\\ ۱۴<n \quad (۱)\end{cases}$$

چون m بر ۶ بخش‌پذیر است، پس:

$$m\overset{۶}{\equiv}۰\Rightarrow ۲۵n+۱۴\overset{۶}{\equiv}۰\Rightarrow n\overset{۶}{\equiv}۴\Rightarrow n=۶k+۴ \quad (۲)$$

m عددی سه رقمی است، پس:

$$۱۰۰\le ۲۵n+۱۴\le ۹۹۹\Rightarrow ۴\le n\le ۳۹ \quad (۳)$$

از (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم:

$$۱۴<n\le ۳۹\Rightarrow ۱۴<۶k+۴\le ۳۹\Rightarrow k\in\{۲,۳,۴,۵\}$$

پس برای n چهار مقدار به‌دست می‌آید:

$$m=۴۱۴,۵۶۴,۷۱۴,۸۶۴$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ الگوریتم تقسیم، هم‌نهشتی)

۱۴- گزینه «۳» ـ اگر $(a,b)=d$، آنگاه عددهایی مانند a' و b' وجود دارند که:

$$a=a'd, b=b'd, (a',b')=۱$$

همچنین:

$$[a,b]=a'b'd$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$۱۵(a'd-b'd)=۲a'b'd\Rightarrow ۱۵(a'-b')=۲a'b'\Rightarrow \frac{a'-b'}{a'b'}=\frac{۲}{۱۵}\xrightarrow{(a',b')=۱\Rightarrow(a'-b',a'b')=۱}\begin{cases}a'-b'=۲\\ a'b'=۱۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a'=۵\\ b'=۳\end{cases}$$

در نتیجه:

$$a+b=d(a'+b')=۷\times(۵+۳)=۵۶$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ ب.م.م و ک.م.م)

۱۵- گزینه «۳» ـ به ازای هر عدد فرد n، $a+b \mid a^n+b^n$، بنابراین اگر n فرد باشد:

$$۵+۱۳\mid ۵^n+۱۳^n\Rightarrow ۱۸\mid ۵^n+۱۳^n\Rightarrow ۹\mid ۵^n+۱۳^n$$

در اعداد دو رقمی ۴۵ عدد فرد وجود دارد، بنابراین برای n، ۴۵ مقدار قابل قبول وجود دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ بخش‌پذیری)

۱۶- گزینه «۱» ـ فرض کنید نهم اردیبهشت aامین روز سال و ۲۷ دی ماه bامین روز سال باشد، در این صورت:

$$\begin{cases}a=۳۱+۹\overset{۷}{\equiv}۵\\ b=۶\times۳۱+۳\times۳۰+۲۷\overset{۷}{\equiv}۲\end{cases}$$

پس aامین روز سال مانند پنجمین روز سال است و bامین روز سال مانند دومین روز سال است. چون پنجمین روز سال پنج‌شنبه است، پس دومین روز سال دوشنبه است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ نظریه اعداد)

۱۷- گزینه «۳» ـ حداکثر اندازه زمانی رخ می‌دهد که غیر از رأس دو بر ۳، هر دو تا از ۷ رأس دیگر مجاور باشند، بنابراین حداکثر انـدازه‌ی G برابـر است با:

$$\binom{۷}{۲} + ۳ = ۲۱ + ۳ = ۲۴$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ مفهوم اندازه و درجه رأس و گراف کامل)

۱۸- گزینه «۳» ـ چون $۱ = \gamma$، پس این گراف رأسی مجاور با سایر رئوس دارد. برای حداقل شدن تعداد یال‌ها کافی است فقـط یـک رأس از درجـه $۹ = ۱ - P$ داشته باشد. این گراف حداقل دارای ۹ یال است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ احاطه‌گری)

۱۹- گزینه «۳» ـ می‌توان نوشت:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \binom{P}{۲} \Rightarrow ۳۰ + q(\bar{G}) = ۴۵ \Rightarrow q(\bar{G}) = ۱۵$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل فصل دوم ـ مکمل گراف)