

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۳» -

$$S_{\Delta} = \frac{(fx)(x+\Delta)}{2} = 2x(x+\Delta) = 2x^2 + 10x$$

$$S_{\square} = (2x+3)(x+1) = 2x^2 + 2x + 3x + 3 = 2x^2 + 5x + 3$$

طبق فرض مسأله:

$$15 + S_{\Delta} = 3S_{\square}$$

$$15 + 2x^2 + 10x = 3(2x^2 + 5x + 3) \Rightarrow 6x^2 + 15x + 9 - 15 - 2x^2 - 10x = 0$$

$$4x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (5)^2 - 4(4)(-6) = 25 + 96 = 121$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2(4)} = \frac{-5 \pm 11}{8} \begin{cases} x_1 = \frac{-5+11}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ x_2 = \frac{-5-11}{8} = \frac{-16}{8} = -2 \end{cases}$$

(یگانه) (پایه دهم - معادلات - معادلات درجه ۲) (متوسط)

۲- گزینه «۱» - فرض کنیم تعداد نفرات در حالت اولیه X بوده است. پس تعداد نفرات در حالت

جدید ۳-X است. سهم هر فرد در حالت اولیه $\frac{1}{X}$ و در حالت جدید $\frac{1}{X-3}$ است و در نتیجه:

$$\frac{1}{X-3} - \frac{1}{X} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{X-(X-3)}{X(X-3)} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{X-X+3}{X(X-3)} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{3}{X(X-3)} = \frac{1}{18} \Rightarrow X^2 - 3X = 54$$

$$X^2 - 3X - 54 = 0 \Rightarrow (X+6)(X-9) = 0$$

$$\text{غ ق ق } X+6=0 \Rightarrow X=-6$$

$$\text{ق ق } X-9=0 \Rightarrow X=9$$

(یگانه) (پایه دهم - معادلات - معادلات گویا) (متوسط)

۳- گزینه «۳» -

$$\begin{cases} (-1, 2a+b) \\ (-1, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0, a-3b) \\ (0, 11) \end{cases} \Rightarrow a-3b=11$$

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ a-3b=11 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 2a+b=1 \\ -2a+6b=-22 \end{cases}$$

$$7b=-21 \Rightarrow b=\frac{-21}{7}=-3$$

$$2a+(-3)=1 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=\frac{4}{2}=2$$

$$\text{sign}(2b+a) = \text{sign}(2(-3)+2) = \text{sign}(-4) = -1$$

$$\left[\frac{a+b}{2a} \right] = \left[\frac{2-3}{2(2)} \right] = \left[\frac{-1}{4} \right] = -1$$

$$\text{sign}(2b+a) + \left[\frac{a+b}{2a} \right] = -1 + (-1) = -2$$

(یگانه) (پایه دهم - تابع - مفهوم تابع) (متوسط)

۴- گزینه «۴» -

$$f(-3)=15 \Rightarrow (-3, 15) \Rightarrow m = \frac{15-3}{-3-1} = \frac{12}{-4} = -3$$

$$f(1)=3 \Rightarrow (1, 3)$$

$$y=mx+h \Rightarrow 3=(1 \times -3)+h \Rightarrow 3+3=h \Rightarrow h=6$$

$$y=-3x+6 \Rightarrow f(x)=-3x+6$$

$$\xrightarrow{x=-1} f(-1) = -3(-1)+6 = 3+6 = 9$$

$$\xrightarrow{x=4} f(4) = -3(4)+6 = -12+6 = -6$$

پس برد تابع به صورت $-6 \leq y \leq 9$ است.

(یگانه) (پایه دهم - تابع - تابع خطی) (متوسط)

۵- گزینه «۲» -

$$\text{سود} = (30x+a) - \left(-\frac{1}{4}x^2 + 70x\right) = \text{هزینه} - \text{درآمد}$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 + 70x - 30x - a = -\frac{1}{4}x^2 + 40x - a$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2(-\frac{1}{4})} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

به ازای تولید ۸۰ واحد کالا سود ماکزیمم (۱۴۰۰ واحد) حاصل می‌شود.

$$-\frac{1}{4}(80)^2 + 40(80) - a = 1400$$

$$-\frac{1}{4}(6400) + 3200 - a = 1400$$

$$-1600 + 3200 - a = 1400$$

$$1600 - 1400 = a \Rightarrow a = 200$$

(یگانه) (پایه دهم - تابع - تابع درجه دوم) (متوسط)

۶- گزینه «۳» -

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}} = \frac{6000}{500} = \frac{60}{5} = 12$$

می دانیم ۹۶ درصد داده‌ها در فاصله ۲ انحراف معیار از میانگین قرار دارند.

$$\text{واریانس} = \sqrt{4} \Rightarrow \text{انحراف معیار} = 2$$

$$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma) = (12 - 2(2), 12 + 2(2))$$

$$= (12 - 4, 12 + 4) = (8, 16)$$

(یگانه) (پایه دهم - آمار - معیارهای پراکندگی) (متوسط)

۷- گزینه «۱» -

$$\text{شاخص کل} = \frac{(70 \times 40) + (50 \times 80) + (30 \times 100)}{(70 \times 20) + (50 \times 50) + (30 \times 60)} \times 100$$

$$= \frac{28000 + 40000 + 30000}{14000 + 25000 + 18000} \times 100 = \frac{98000}{57000} \times 100 \approx 171$$

(یگانه) (پایه یازدهم - آمار - شاخص‌های آماری) (متوسط)

۸- گزینه «۴» - ابتدا زاویه مربوط به گروه سنی «ج» را می‌یابیم:

$$\alpha = 360 - (35 + 120 + 60 + 65) = 360 - 280 = 80$$

حال براساس تعداد افراد گروه «ج»: تعداد کل افراد را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{80}{360} = \frac{64}{n} \Rightarrow n = \frac{64 \times 360}{80} = 288$$

و در نهایت تعداد افراد با گروه سنی «الف» را می‌یابیم:

$$\frac{35}{360} = \frac{x}{288} \Rightarrow x = \frac{35 \times 288}{360} = 28$$

(یگانه) (پایه دهم - آمار - نمودارهای آماری) (آسان)

۹- گزینه «۱» - چون گزاره شرطی نادرست است پس مقدم $(p \sim q)$ درست و تالی (r)

نادرست است و چون ترکیب عطفی $p \sim q$ درست است یعنی $p \equiv 1$ و $q \equiv 0$ و در نتیجه $q \equiv 0$ است.

$$p \equiv 1 \text{ و } q \equiv 0 \text{ و } r \equiv 0$$

حال داریم:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow r \Leftrightarrow ((0 \vee 1) \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow 0$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»:

$$p \wedge q \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$$

گزینه «۲»:

$$\sim r \equiv 1$$

گزینه «۳»:

$$\sim r \wedge p \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$$

گزینه «۴»:

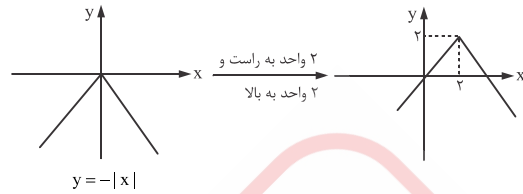
$$r \vee \sim q \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$$

(یگانه) (پایه یازدهم - منطق و استدلال ریاضی - گزاره‌ها) (آسان)

۱۰- گزینه «۲» - ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. پس:

$$f(2 - |x - 2|) = 2 - |x - 2| = -|x - 2| + 2$$

برای رسم این تابع از روش انتقال استفاده می‌کنیم:



مشاهده می‌شود، نمودار از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.
(یگانه) (پایه یازدهم - تابع - نمودار تابع قدرمطلق) (متوسط)

۱۱- گزینه «۳» -

$$(12,000,000 - 8,000,000) \times \frac{10}{100} = 4,000,000$$

$$(15,000,000 - 12,000,000) \times \frac{20}{100} = 6,000,000$$

$$(19,000,000 - 15,000,000) \times \frac{25}{100} = 1,000,000$$

مجموع مبلغ مالیات برابر است با:

$$4,000,000 + 6,000,000 + 1,000,000 = 11,000,000 \text{ تومان}$$

(یگانه) (پایه یازدهم - تابع - توابع پلکانی) (دشوار)

۱۲- گزینه «۴» - ابتدا ضابطه $\frac{f}{g}$ را می‌یابیم. این تابع از نقاط $(0, 0)$ و $(2, 1)$ می‌گذرد:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

عرض از مبدأ برابر صفر است. پس:

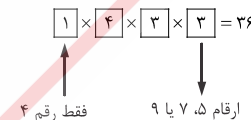
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}x \Rightarrow g(x) = \frac{-x^2}{\frac{1}{2}x} \Rightarrow g(x) = -2x$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-2\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \left(-2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = (-1) - (1) = -2$$

(یگانه) (پایه یازدهم - تابع - اعمال بر روی توابع) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» -



(یگانه) (پایه دوازدهم - آمار و احتمال - شمارش) (آسان)

۱۴- گزینه «۳» - ناحیه هاشورخورده به صورت زیر تعریف می‌شود:

پیشامدهای A و B رخ دهند اما پیشامد C رخ ندهد. که تعریف مجموعه‌ای آن به صورت $(A \cap B) - C$ است. از طرفی می‌دانیم در مجموعه‌ها $A - B = A \cap B'$ است. پس:
 $(A \cap B) - C = (A \cap B) \cap C'$

که برابر عبارت داده شده در گزینه «۳» است.

(یگانه) (پایه دوازدهم - آمار و احتمال - اعمال روی پیشامدها) (متوسط)

۱۵- گزینه «۱» -

$$n(s) = \binom{3+4+6}{3} = \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10!}{3 \times 2 \times 1 \times 10!} = 286$$

برای آنکه رنگ سه مهره قرمز نباشد از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم:

رنگ هر سه مهره قرمز باشد A'

$$n(A') = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 20$$

$$p(A') = \frac{20}{286} = \frac{10}{143}$$

$$p(A) = 1 - \frac{10}{143} = \frac{133}{143}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - آمار و احتمال - احتمال) (متوسط)

۱۶- گزینه «۱» - به جای n عدد ۵ را قرار می‌دهیم.

$$\xrightarrow{n=5} a_5 = 2a_4 + a_5 - 5 \Rightarrow 34 = 2a_4 - 13 - 5$$

$$\Rightarrow 34 + 18 = 2a_4 \Rightarrow 52 = 2a_4 \Rightarrow a_4 = 26$$

$$\xrightarrow{n=6} a_6 = 2a_5 + a_6 - 6 \Rightarrow a_6 = 2(26) + 26 - 6$$

$$a_6 = 68 + 20 \Rightarrow a_6 = 88$$

$$\xrightarrow{n=7} a_7 = 2a_6 + a_7 - 7 \Rightarrow a_7 = 2(88) + 34 - 7$$

$$= 176 + 27 = 203$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - دنباله و مدل‌سازی - رابطه بازگشتی) (دشوار)

۱۷- گزینه «۲» - دنباله‌ای که از الگوی خطی پیروی می‌کند، دنباله حسابی است که شیب خط همان اختلاف مشترک دنباله است.

$$a_7 + a_{15} = 40 \Rightarrow a_1 + 7d + a_1 + 14d = 40$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 21d = 40 \xrightarrow{+2} a_1 + 11d = 20 \Rightarrow a_1 = 20 - 11d$$

چون نقطه $(4, 10)$ متعلق به این الگوی خطی است. پس:

$$a_4 = 10$$

$$d = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = \frac{10 - 20}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 20 \Rightarrow a_1 + 8\left(-\frac{10}{3}\right) = 20$$

$$a_1 = 20 - 16 = 4$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - دنباله - دنباله حسابی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» -

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \Rightarrow r^{7-2} = \frac{80}{5} \Rightarrow r^5 = 16$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[5]{16} \xrightarrow{r>0} r = 2$$

$$a_7 = a_1 r^6 \Rightarrow 5 = a_1 (2)^6 \Rightarrow 5 = 64a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{64}$$

$$S_r = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_{10} = \frac{\frac{5}{64}(1-2^{10})}{1-2} = \frac{\frac{5}{64}(1-1024)}{-1}$$

$$\frac{\frac{5}{64}(-1023)}{-1} = \frac{5}{64} \times 1023 = \frac{5115}{64}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - الگوهای غیرخطی - دنباله هندسی) (متوسط)

۱۹- گزینه «۴» -

$$\left(\frac{0}{25}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-1} = 25 = 5^2$$

$$\left(\frac{0}{125}\right)^x = \left(\frac{125}{1000}\right)^x = \left(\frac{5^3}{10^3}\right)^x = \left(\frac{5}{10}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 2^{-3x}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{x}{2}} = 2^{2-\frac{x}{2}}$$

و در نتیجه داریم:

$$\frac{2^2}{2^{\frac{x}{2}-1}} = 2^{-3x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2^2 = 2^{\frac{x}{2}-1-3x} \Rightarrow 2^2 = 2^{\frac{x}{2}-1-6x}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{x}{2} - 1 - 6x \xrightarrow{\times 2} 4 = x - 2 - 12x$$

$$\Delta x = -2 - 4 \Rightarrow \Delta x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{\Delta} = -1/2$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - الگوهای غیرخطی - توان‌های گویا) (متوسط)

۲۰- گزینه «۳» -

$$f(x) = ab^{x+1}, f(-2) = 6, 3f(-1) = 6 \Rightarrow f(-1) = \frac{6}{3} = 2$$

$$\xrightarrow{f(-2)=6} 6 = ab^{-2+1} \Rightarrow 6 = ab^{-1}$$

$$\xrightarrow{f(-1)=2} 2 = ab^{-1+1} \Rightarrow 2 = ab^0 \Rightarrow 2 = a$$

حال داریم:

$$6 = ab^{-1} \Rightarrow 6 = 2 \times b^{-1} \Rightarrow 6 = \frac{2}{b} \Rightarrow 6b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \Rightarrow f(0) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{0+1} = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

(یگانه) پایه دوازدهم - الگوهای غیرخطی - تابع نمایی (متوسط)