

حسابان

۱- گزینه «۲» -

$$\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 0 \xrightarrow{\div \cos \alpha} \tan \alpha = 2$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 4} = \frac{1}{5} = 0.2$$

(حاتمی) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - مثلثات - روابط مثلثاتی) (متوسط)

۲- گزینه «۱» - با ضرب کردن طرفین معادله در $(x+2)(x^2-2x+4)$ می توان

نوشت:

$$(x+2)(6x) + (x^2-9x-2) = x^3-2x+4 \Rightarrow$$

$$6x^2 + 12x + x^2 - 9x - 2 = x^3 - 2x + 4 \Rightarrow$$

$$6x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (2x+3)(3x-2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ یا } \frac{2}{3}$$

که ریشه مثبت $\alpha = \frac{2}{3} > 0$ بوده و $\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}$ و $[\frac{3}{2}] = 1$ خواهد بود.

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل اول - درس سوم - معادله گویا) (متوسط)

۳- گزینه «۲» - با تشکیل S و P در ابتدا می توان نوشت:

$$S = \tan \alpha + \tan \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{3}$$

$$P = \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{-4}{3}}{1 - (\frac{-1}{3})} = \frac{\frac{-4}{3}}{\frac{4}{3}} = -1 \Rightarrow \cot(\alpha + \beta) = -1$$

(حاتمی) (پایه یازدهم و دوازدهم - فصل دوم - درس اول - مثلثات و معادله) (متوسط)

۴- گزینه «۴» -

شماره دسته	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
عدد انتهایی	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹

یعنی دسته هفتم به صورت $\{37, \dots, 49\}$ می باشد و اختلاف اعداد انتهایی و ابتدایی آن برابر $49 - 37 = 12$ می باشد. (حاتمی) (پایه دهم - فصل اول - درس سوم - الگو) (متوسط)

۵- گزینه «۴» - می بایستی $\Delta > 0$, $S > 0$, $P > 0$ باشد که داریم:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow (a-2)^2 - 4(a+1) > 0 \Rightarrow a^2 - 4a > 0 \Rightarrow a < 0, a > 4$$

$$2) S > 0 \Rightarrow -(a-2) > 0 \Rightarrow a-2 < 0 \Rightarrow a < 2$$

$$3) P > 0 \Rightarrow a+1 > 0 \Rightarrow a > -1$$

$$1) \cap 2) \cap 3) \Rightarrow a \in (-1, 0)$$

که گزینه «۴» صحیح خواهد بود. (حاتمی) (پایه یازدهم - فصل اول - درس دوم - معادله درجه دوم) (متوسط)

۶- گزینه «۱» - می بایستی $\log \frac{2x+1}{x} = \log 3$ بوده و از آن به $\frac{2x+1}{x} = 3$ می رسم که داریم:

$$x \neq 0 \Rightarrow 2x+1 = 3x \Rightarrow x = 1$$

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس سوم - تابع - تابع وارون) (آسان)

۷- گزینه «۴» -

$$f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow f(\cos x) = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x \Rightarrow$$

$$\text{fof}(\cos x) = f(f(\cos x)) = f(\cos 2x) = 2\cos^2 2x - 1 = \cos 4x$$

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس چهارم - اعمال روی توابع - تابع مرکب) (آسان)

۸- گزینه «۲» - ابتدا می بایستی در بازه باز $(0, 1)$ بررسی کنیم که داریم:

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < 2x < 2 \Rightarrow -5 < 2x - 5 < -2$$

$$2x - 5 = -4, -3 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5 = -4 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2x - 5 = -3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

سیس در نقاط $x = 0$ بررسی پیوستگی راست و در $x = 1$ پیوستگی چپ بررسی می شود:

$$\text{در } x = 0 \text{ پیوسته می باشد. } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{5}, f(0) = \frac{-1}{5} \Rightarrow \text{الف}$$

$$\text{ب) } x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{-1}{2}, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{[2x] - 5} = \frac{1}{2 - 5} = \frac{-1}{3}$$

بنابراین تابع در سه نقطه $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ ناپیوسته خواهد بود.

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل پنجم - درس پنجم - پیوستگی تابع) (دشوار)

۹- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x)}{\sqrt{2}(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 1 + \frac{1}{2} \sin 2x = 1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل پنجم - درس چهارم - حد تابع - محاسبه حد تابع) (متوسط)

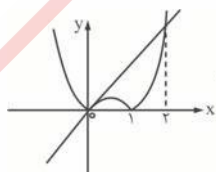
۱۰- گزینه «۲» - برای طرف اول معادله داریم:

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - مثلثات - معادله مثلثاتی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۳» - می بایستی مجموعه جواب نامعادله قدرمطلق $|x^2 - x| < x$ را به دست آوریم:



$$\Rightarrow x \in (0, 2) \Rightarrow b - a = 2$$

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل اول - درس چهارم - ویژگی های قدر مطلق - روش هندسی حل نامعادله) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» - با توجه به روابط ماکزیمم و مینییمم این تابع می توان نوشت:

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c = 1 \\ y_{\min} = -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول - مثلثات - تناوب و ماکزیمم) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» - می بایستی تابع ثابت بوده و $f'(x) = 0$ باشد که داریم:

$$f'(x) = \frac{2a-12}{(6x+3)^2} = 0 \Rightarrow 2a-12 = 0 \Rightarrow a = 6$$

از طرفی در تابع هموگرافیک با ضابطه $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$: $c \neq 0$ با شرط $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ تابع به

یک خط راست افقی (تابع ثابت) تبدیل می شود.

(حاتمی) (پایه یازدهم - فصل پنجم - درس اول - یکنوایی تابع - کاربرد مشتق) (متوسط)

۱۹- گزینه «۳» - ریشه ساده قدر مطلق یعنی $x = 2$ زاویه‌دار یا گوشه‌ای تابع بوده و برای مشتق‌های راست و چپ داریم:

$$x > 2 \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{5}$$

$$x < 2 \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2 + 1} = \frac{-1}{5}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} \right| = \left| \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} \right| = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری - پیوستگی) (متوسط)

۲۰- گزینه «۱» - می‌بایستی نقطه $(1, -2)$ مختصات عطف تابع بوده و داشته باشیم:

$$y = ax^3 + bx^2 - 3x - 1 \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx - 3 \Rightarrow y'' = 6ax + 2b = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$$

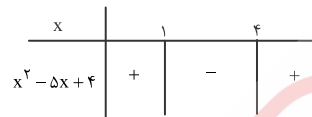
$$(1, -2) \in f \Rightarrow a + b - 3 - 1 = -2 \Rightarrow a + b = 2$$

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 3 \Rightarrow b - a = 3 - (-1) = 4$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس دوم - کاربرد مشتق - نقطه عطف) (متوسط)

۱۴- گزینه «۳» - نمودار در ریشه‌های مخرج یعنی $x^2 - 5x + 4 = 0$ در نقاط $x = 1$ یا $x = 4$ که $y \rightarrow \infty$ می‌باشد مجانب قائم دارد که خط مجانب قائم کوچک‌تر آن در $x = 1$ می‌باشد.

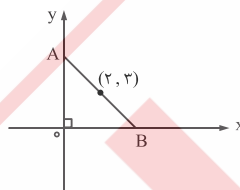
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + [x]}{x^2 - 5x + 4} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$



بنابراین گزینه «۳» صحیح خواهد بود.

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - حد بی‌نهایت) (متوسط)

۱۵- گزینه «۳» -



$$y = nx + m$$

$$(r, r) \in f \Rightarrow r = rn + m \Rightarrow m = r - rn \Rightarrow$$

$$f(x) = nx + (r - rn)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = r - rn$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{rn - r}{n}$$

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \left(\frac{rn - r}{n} \right) (r - rn) = \frac{-1}{2n} (rn - r)^2$$

$$S' = 0 \Rightarrow n = \frac{r}{2} \text{ یا } \frac{-r}{2} \Rightarrow S\left(\frac{-r}{2}\right) = 12$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - کاربرد مشتق - بهینه‌سازی) (دشوار)

۱۶- گزینه «۱» - ابتدا حد تابع در بی‌نهایت را می‌یابیم که داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{ax - \sqrt{x+3}} = \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{2x - \sqrt{x+3}} = \frac{0}{0} \Rightarrow +1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{2 - \frac{1}{\sqrt{x+3}}} = \frac{-4}{7}$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - حد در بی‌نهایت) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» - ابتدا ضابطه تابع را ساده نموده و سپس مشتق را بدست می‌آوریم:

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x,$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \Rightarrow y' = \left(\frac{-1}{2} \right) (\sin 2x) (2 \cos 2x) = -\sin 4x \Rightarrow$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{16}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول - مشتق - شیب خط) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» - با توجه به ریشه مکرر مرتبه سوم در $x = 0$ می‌بایستی در معادله $y = 0$

یعنی $ax^3 + x = 0$ مقدار $a = 0$ باشد. همچنین مخرج نیز با توجه به نمودار می‌بایستی ریشه مضاعف داشته باشد زیرا $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = +\infty$ است که در آن k ریشه مضاعف مخرج است:

$$x^2 + bx + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b = \pm 2$$

و چون ریشه مضاعف مخرج مثبت است می‌بایستی $b = -2$ باشد که داریم:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - حد نامتناهی - حد تابع) (متوسط)