

ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۱» - برای این که گزاره $(r \Rightarrow s) \wedge (r \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q))$ درست باشد:

(۱) باید گزاره $r \Rightarrow s$ درست باشد از آنجا که s نادرست است r نیز باید نادرست باشد.

(۲) باید گزاره $\sim p \vee \sim q$ شرطی $r \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ درست باشد از آنجا که r نادرست است

باید $(\sim p \vee \sim q)$ نادرست باشد:

$$\sim p \vee \sim q \equiv F \Rightarrow \sim (p \wedge q) \equiv F \Rightarrow p \wedge q \equiv T$$

بنابراین p و q هر دو باید درست باشند.

(یاقوتی) (پایه یازدهم - فصل اول - درس اول) (متوسط)

۲- گزینه «۱» -

$$p(A' \cap B) = \frac{1}{7} \Rightarrow p(B - A) = \frac{1}{7} \Rightarrow p(B) - (A \cap B) = \frac{1}{7} \quad (۱)$$

$$3p(B') = \frac{1}{7} \Rightarrow p(B') = \frac{1}{21} \Rightarrow p(B) = \frac{20}{21}$$

$$\frac{5}{6} - p(A \cap B) = \frac{1}{7} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{42}$$

می دانیم:

$$P(A - B') = p(A \cap B) = \frac{1}{42}$$

(یاقوتی) (پایه یازدهم - فصل اول - درس اول) (آسان)

۳- گزینه «۳» -

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{یک مهره آبی خارج شود} \rightarrow \frac{\binom{5}{1} \binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7} \rightarrow \frac{1}{7} \Rightarrow p = \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{21} \\ \text{دو مهره آبی خارج شود} \rightarrow \frac{\binom{5}{2} \binom{2}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{7} \Rightarrow p = \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{21} \\ \text{سه مهره آبی خارج شود} \rightarrow \frac{\binom{5}{3} \binom{2}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{2}{7} \Rightarrow p = \frac{2}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{21} \end{array} \right.$$

$$p = \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{2}{21} = \frac{4}{21}$$

(یاقوتی) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس سوم) (دشوار)

۴- گزینه «۳» - با اضافه شدن k واحد به تمام داده ها واریانس تغییر نمی کند و میانگین $\bar{x}$ واحد

افزایش می یابد.

$$\frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{5} \Rightarrow s = \frac{4}{5} \bar{x}$$

$$\frac{s}{\bar{x} + 5} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4s - 3\bar{x} = 15 \Rightarrow \frac{16}{5} \bar{x} - 3\bar{x} = 15$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 7.5, s = \frac{4}{5}(7.5) = 6 \Rightarrow s^2 = 36$$

(یاقوتی) (پایه یازدهم - فصل سوم - درس سوم) (آسان)

۵- گزینه «۲» - می دانیم فاصله اطمینان ۹۵٪ برای برآورد میانگین به صورت زیر است:

$$\left[\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

بنابراین طول بازه اطمینان برابر با اختلاف حدود بازه است:

$$\left(\bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right) - \left(\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

در بازه داده شده طول بازه برابر با «۲» است: $(21/2 - 19/2 = 2)$

$$\frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \xrightarrow{\sigma=4} \frac{16}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow n = 64$$

(یاقوتی) (پایه یازدهم - فصل چهارم - درس دوم) (متوسط)

۶- گزینه «۳» - عدد را در همنهشتی ۱۰ قرار می دهیم. می دانیم عدد $k!$ با شرط $k \geq 5$ به

صفر ختم می شود. پس به پیمانه ۱۰ با صفر همنهشت خواهد بود:

$$A \equiv (1! + 2! + 3! + \dots + 14! \cdot 3!) (2! + 4! + 6! + \dots + 14! \cdot 4!) \pmod{10}$$

$$\equiv (1 + 2 + 6 + 24 + 0 + \dots + 0) (2 + 24 + 0 + \dots + 0) \pmod{10} \equiv 33 \times 26 \equiv 3 \times 6 \equiv 8 \pmod{10}$$

بنابراین رقم یکان عدد A برابر ۸ است. برای تعیین رقم یکان A^{15} کافی است به جای توان

باقیمانده تقسیم آن بر ۴ را قرار دهیم:

$$A^{15} \equiv 8^{15} \equiv 8^3 \equiv 2 \pmod{4}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم) (متوسط)

۷- گزینه «۱» - عدد بر ۱۱ بخش پذیر است. طبق قاعده تقسیم پذیری بر ۱۱ می توان گفت:

$$b - 7 + b - a + b - a \equiv 0 \Rightarrow 3b - 2a \equiv 7 \pmod{11} \quad (۱)$$

از آنجا که کمترین مقدار عدد را می خواهیم کوچکترین مقدار ممکن برای رقم a را قرار

می دهیم تا در صورت امکان رقم b نیز مشخص شود. $(a = 1)$:

$$3b - 2(1) \equiv 7 \Rightarrow 3b \equiv 9 \Rightarrow b \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow b = 3$$

بنابراین عدد مورد نظر ۱۳۱۳۷۳ است که برای تعیین باقیمانده تقسیم آن بر ۴ کافی است

باقیمانده تقسیم ۲ رقم سمت راست آن (۷۳) را بر ۴ به دست آوریم که برابر ۱ خواهد بود.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم) (دشوار)

۸- گزینه «۲» - روش اول: برای ساختن Δ - منتظم باید $p \geq 6$ باشد و برای رسیدن به حالت

ناهمبند باید $p \geq 12$ باشد تا از گرافها بسازیم. بنابراین مقادیر p باید در

بازه $6 \leq p < 12$ قرار گیرند. از طرفی در گراف Δ - منتظم مرتبه p باید حداقل یکی از دو

مقدار r و r زوج باشد. پس: 10 یا 8 یا 6 یعنی $p = 6$ مقدار می تواند داشته باشد.

روش دوم: شرط این که گراف Δ - منتظم مرتبه p قطعاً همبند باشد این است که:

$$r > \frac{p-1}{2}$$

بنابراین در شرایطی که $r = 5$ است داریم:

$$5 > \frac{p-1}{2} \Rightarrow p < 11 \xrightarrow[p > 5]{\text{باید زوج باشد}} p = 6, 8, 10$$

پس برای p سه مقدار وجود خواهد داشت.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول) (متوسط)

۹- گزینه «۴» -

$$180 = \frac{6!}{2!2!} = \text{تعداد کل کلمات ۶ حرفی}$$

$$60 = \frac{5!}{2!} = |A|: \text{تعداد کلماتی که ۲ حرف (ش) کنار هم هستند}$$

$$60 = \frac{5!}{2!} = |B|: \text{تعداد کلماتی که ۲ حرف (۱) کنار هم هستند}$$

$$24 = 4! = |A \cap B|: \text{تعداد کلماتی که ۲ حرف (۱) کنار هم و ۲ حرف (ش) کنار هم هستند}$$

$$84 = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 60 + 60 - 24$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» - تعداد کل پاسخهای ممکن $2^6 = 64$ حالت است.

طبق اصل لانه کیوتی اگر تعداد لانه ها را ۶۴ در نظر گرفته و در هر یک از لانه ها ۳ کیوتی

قرار دهیم (تا اینجا $3 \times 64 = 192$) با قرار گرفتن ۱۹۳ آمین کیوتی در یکی از لانه ها

مطمئن می شویم لانه ای با حداقل ۴ کیوتی موجود است. بنابراین باید حداقل ۱۹۳ نفر

انتخاب شود. (یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم) (آسان)