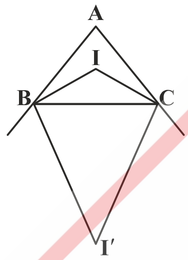
هندسه ۱

۱-گزینه «۲» ـ زاویه بین دو نیمساز داخلی در هر مثلث برابر $۹۰^\circ+\frac{\text{زاویه رأس سوم}}{۲}$ و زاویه بین دو نیمساز خارجی در هر مثلث برابر $۹۰^\circ-\frac{\text{زاویه رأس سوم}}{۲}$ می‌باشد.

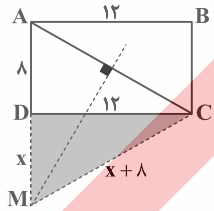


$$\hat I=۷\hat I' \Rightarrow ۹۰^\circ+\frac{\hat A}{۲}=۷(۹۰^\circ-\frac{\hat A}{۲}) \Rightarrow ۹۰^\circ+\frac{\hat A}{۲}=۶۳۰^\circ-\frac{۷\hat A}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴\hat A=۵۴۰^\circ \Rightarrow \hat A=۱۳۵^\circ$$

(علوی) (استدلال ـ زاویه در مثلث) (متوسط)

۲-گزینه «۴» ـ مطابق شکل عمودمنصف قطر AC را رسم می‌کنیم تـا امتداد AD را در M قطع کند. اگر $MD=x$ باشد، داریم:



M روی عمودمنصف **AC** است. $\Rightarrow MC=MA=x+۸$

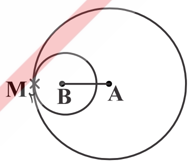
$$\overset{\Delta}{DMC}: MC^۲=MD^۲+MC^۲ \Rightarrow (x+۸)^۲=x^۲+۱۲^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+۱۶x+۶۴=x^۲+۱۴۴ \Rightarrow ۱۶x=۸۰ \Rightarrow x=۵$$

$$MC=x+۸=۵+۸=۱۳$$

(علوی) (ترسیم‌های هندسی ـ ویژگی عمودمنصف) (متوسط)

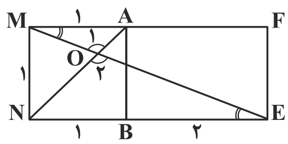
۳-گزینه «۲» ـ مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ۸ واحد هستند، دایره‌ای بـه مرکز A و شعاع ۸ واحد است. همچنین مجموعه تمام نقاطی از صفحه که از نقطـه B بـه فاصله ۳ واحد هستند دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ واحـد اسـت. اشـتراک ایـن دو دایـره (نقطهM) جواب مسئله است.



(علوی) (ترسیم‌های هندسی ـ پیدا کردن نقاط با ویژگی مشخصی در صفحه) (دشوار)

۴-گزینه «۴» ـ

$$\overset{\Delta}{MNE}: ME=\sqrt{۱^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۰}$$



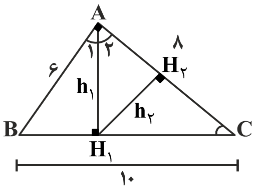
$$\left.\begin{array}{l}\hat O_۱=\hat O_۲\\ \hat E=\hat M\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\Delta}{AOM}\sim\overset{\Delta}{NOE}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OE}=\frac{AM}{NE} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{OM}{\underbrace{OE+OM}_{ME}}=\frac{AM}{NE+AM}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۱}{۳+۱} \Rightarrow OM=۰/۲۵\sqrt{۱۰}$$

(علوی) (تشابه دو مثلث ـ حالت دو زاویه برابر) (متوسط)

۵-گزینه «۳» ـ



$$BC=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۰$$

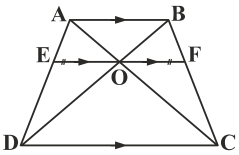
$$\left.\begin{array}{l}\hat A_۲=\hat B\\ \hat C=\hat C\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\Delta}{AH_۱C}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

می‌دانیم نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث متشابه برابر است با نسبت تشابه دو مثلث، بنابراین:

$$\frac{h_۱}{h_۲}=\frac{BC}{AC}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

(سراسری با تغییر) (تشابه دو مثلث ـ نسبت ارتفاع‌های نظیر) (متوسط)

۶-گزینه «۳» ـ

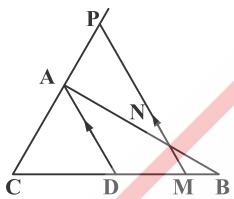


$$\frac{۱}{OE}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{DC} \Rightarrow \frac{۱}{OE}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۷} \Rightarrow \frac{۱}{OE}=\frac{۱۱}{۲۸} \Rightarrow OE=\frac{۲۸}{۱۱}$$

$$EF=۲OE=۲\times\frac{۲۸}{۱۱}=\frac{۵۶}{۱۱}$$

(سراسری با تغییر) (قضیه تالس ـ تالس در ذوزنقه) (متوسط)

۷-گزینه «۱» ـ



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{CMP}: DA \parallel MP \Rightarrow \frac{CD}{CM}=\frac{AD}{MP}\\ \text{میانه است } AD \Rightarrow CD=BD\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BD}{CM}=\frac{AD}{MP}$$

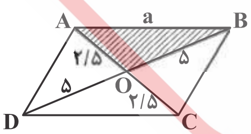
$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow[\text{معکوس می‌کنیم}]{\text{طرفین تناسب را}} \frac{CM}{BD}=\frac{MP}{AD}\\ \overset{\Delta}{ABD}: MN \parallel DA \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{BM}{BD}=\frac{MN}{AD}\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{را جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تناسب}} \frac{CM+BM}{BD}=\frac{MN+MP}{AD} \Rightarrow$$

$$\frac{BC}{BD}=\frac{MN+MP}{AD} \Rightarrow ۲=\frac{MN+MP}{AD} \Rightarrow MN+MP=۲AD=۲\times۶=۱۲$$

(کتاب همراه علوی با تغییر) (قضیه تالس ـ تعمیم تالس) (دشوار)

۸-گزینه «۴» ـ متوازی‌الاضلاعی را به‌صورت زیر، رسم شده فرض می‌کنیم. کافی اسـت شـرط وجود مثلث را در یکی از مثلث‌های کوچک بررسی کنیم.

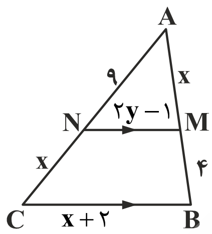


می‌دانیم اندازه هر ضلع مثلث از قدرمطلق تفاضل انـدازه‌هـای دو ضـلع دیگـر بـیش‌تـر و از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر کم‌تر است. این شرط را در مثلث AOB می‌نویسیم:

$$|OA-OB|<AB<OA+OB \Rightarrow |۲/۵-۵|<AB<۲/۵+۵ \Rightarrow$$
$$۲/۵<AB<۷/۵ \Rightarrow ۲/۵<a<۷/۵$$

(کتاب همراه علوی با تغییر) (ترسیم‌های هندسی ـ رسم چهارضلعی‌ها و نامساوی مثلث) (آسان)

۹-گزینه «۲» ـ



$$\overset{\Delta}{ABC}: NM \parallel CB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{۹}{x}=\frac{x}{۴} \Rightarrow x=۶$$

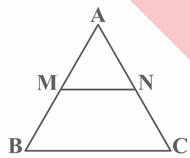
$$\overset{\Delta}{ABC}: NM \parallel CB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AN}{AC}=\frac{NM}{BC} \Rightarrow \frac{۹}{۹+x}=\frac{۲y-۱}{x+۲}$$

$$\xrightarrow{x=۶} \frac{۹}{۹+۶}=\frac{۲y-۱}{۶+۲} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{۲y-۱}{۸} \Rightarrow ۴/۸=۲y-۱ \Rightarrow y=۲/۹$$

$$x+y=۶+۲/۹=۸/۹$$

(کتاب درسی) (قضیه تالس ـ تعمیم تالس) (آسان)

۱۰-گزینه «۱» ـ



$$MN \parallel BC \xrightarrow[\text{تشابه مثلث ها}]{\text{قضیه اساسی}} \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{MNCB}+S_{\overset{\Delta}{AMN}}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{۸S_{\overset{\Delta}{AMN}}+S_{\overset{\Delta}{AMN}}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB-AM}=\frac{۱}{۳-۱} \Rightarrow \frac{AM}{BM}=\frac{۱}{۲}$$

(کتاب درسی) (تشابه ـ کاربرد تشابه مثلث‌ها) (متوسط)