ریاضی ۱

۱- گزینه «۲» ـ برای آن‌که سهمی دارای ریشه مضاعف باشد، $\Delta = ۰$ باید باشد:

$$\Delta = (a-۱)^۲ - ۴\times ۱\times (a+۲) = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۲a + ۱ - ۴a - ۸ = a^۲ - ۶a - ۷ = ۰ \Rightarrow a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۶ \pm \sqrt{\overset{۸}{\cancel{۳۶+۲۸}}}}{۲} = \begin{cases} ۷ \\ -۱ \end{cases}$$

بنابراین رأس سهمی برابر می‌شود با:

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{(a-۱)}{۲} = ۳ \text{ یا } -۱$$

$$y = \frac{-b^۲ + ۴ac}{۴a} = \frac{-(a-۱)^۲ + ۴(a+۲)}{۴\times ۱} = ۰$$

که نقطه $(۳, ۰)$ بر خط $y - ۲x + ۶ = ۰$ قرار دارد که به‌ازای $a = ۷$ حاصل می‌شود.

(اللهدادی) (فصل چهارم ـ دروس اول و دوم ـ معادله دارای ریشه مضاعف و مختصات رأس سهمی)

۲- گزینه «۳» ـ از طریق ساده کردن رادیکال‌ها داریم:

$$۴^{x-y} = ۲^{۲x-۲y} , (\frac{۱}{۲})^{\frac{x+y}{۶}} = ۲^{\frac{-x-y}{۶}} , (\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}})^{x+y-۵} = ۲^{\frac{-x-y+۵}{۴}}$$

در دنباله هندسی می‌دانیم نسبت جملات متوالی برابر قدرنسبت است و جملات متوالی دارای نسبت‌های یکسانی‌اند:

$$\frac{۲^{۲x-۲y}}{۲^{\frac{-x-y}{۶}}} = \frac{۲^{\frac{-x-y}{۶}}}{۲^{\frac{-x-y+۵}{۴}}}$$

$$۲^{۲x-۲y+\frac{x+y}{۶}} = ۲^{\frac{-x-y}{۶}+\frac{x+y-۵}{۴}} \xrightarrow{\text{بنابراین توان دو عدد با یکدیگر برابرند}} ۲x - ۲y + \frac{x+y}{۶} = \frac{-x-y}{۶} + \frac{x+y-۵}{۴}$$

$$۲۴x - ۲۴y + ۲x + ۲y = -۲x - ۲y + ۳x + ۳y - ۱۵ \Rightarrow ۲۳y - ۲۵x = ۱۵$$

در دنباله حسابی داریم:

$$a_۳ - a_۲ = a_۲ - a_۱ = d \Rightarrow x + y - ۵ + \frac{-x-y}{۶} = \frac{x+y}{۶} - x + y$$

$$۶x + \cancel{۶y} - ۳۰ - x - y = x + y - ۶x + \cancel{۶y} \Rightarrow ۱۰x - ۲y = ۳۰ \Rightarrow ۵x - y = ۱۵$$

$$y = ۵x - ۱۵ \Rightarrow ۲۳y - ۲۵x = ۱۵ \Rightarrow ۲۳(۵x - ۱۵) - ۲۵x = ۱۵ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow y = ۵\times ۴ - ۱۵ = ۵ \Rightarrow x + y = ۹$$

(اللهدادی) (فصل اول ـ درس چهارم و فصل سوم ـ درس سوم ـ دنباله هندسی و حسابی و توان‌های گویا)

۳- گزینه «۲» ـ عبارت «الف» درست می‌باشد.

$$۲۴ < \sqrt{۵۸۱} < ۲۵ \Rightarrow ۵۷۶ < ۵۸۱ < ۶۲۵$$

عبارت «ب» درست می‌باشد: a یک عدد بین -۱ , ۰ است، بنابراین $a^۲$ یک عدد بین صفر و یک است.

اعداد بین صفر و یک هرچه به توان کوچک‌تر برسند، بزرگ‌تر می‌شوند: $(a^۲)^{\frac{۱}{۳}} > (a^۲)^۱$

عبارت «ج» نادرست می‌باشد: اگر a را -۱ , b را -۲ در نظر بگیریم و $n = ۲$ آن‌گاه عبارت برقرار نخواهد بود.

عبارت «د» نادرست می‌باشد:

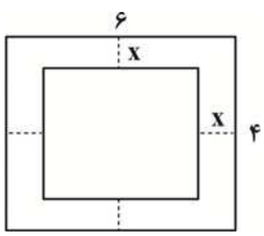
$$\sqrt[۳]{۰/۱۲۵} = ۰/۵ , \sqrt{۰/۲۵} = ۰/۵$$

عبارت «و» درست می‌باشد:

$$\sqrt[۳]{a^۲\sqrt{b}\times \sqrt[۴]{۲}} \Rightarrow \sqrt[۳]{a\sqrt[۴]{۲b^۲}} \Rightarrow \sqrt[۱۲]{۲a^۴b^۲}$$

(اللهدادی) (فصل سوم ـ دروس اول و دوم و سوم ـ مقایسه اعداد رادیکالی، ساده‌کردن رادیکال‌ها، ریشه و توان)

۴- گزینه «۱» ـ مساحت فرش مطابق شکل روبه‌رو برابر است با:



$$S = (۶ - ۲x)(۴ - ۲x)$$

$$۸ = (۶ - ۲x)(۴ - ۲x) \Rightarrow ۸ = ۴x^۲ - ۲۰x + ۲۴ \Rightarrow ۴x^۲ - ۲۰x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲۰ \pm \sqrt{۴۰۰ - ۲۵۶}}{۸} = \begin{cases} ۱ \\ ۴ \end{cases}$$

x برابر ۴ امکان‌پذیر نمی‌باشد، چون آن‌گاه یک طول ضلع فرش منفی می‌شود که ناممکن است.

(اللهدادی) (فصل چهارم ـ درس اول ـ حل معادله درجه دوم)

۵- گزینه «۲» ـ هر سهمی دارای معادله به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ است.

$(۱,۰) \Rightarrow a+b+c=۰ , (۰,-۶) \Rightarrow a\times ۰+b\times ۰+c=-۶ \Rightarrow c=-۶$

$a+b-۶=۰ \Rightarrow a+b=۶$

$(۵,-۱۶) \Rightarrow ۲۵a+۵b-۶=-۱۶ \Rightarrow ۲۵a+۵b=-۱۰ , b=۶-a$

$۲۵a+۵(۶-a)=-۱۰ \Rightarrow ۲۵a+۳۰-۵a=-۱۰ \Rightarrow ۲۰a=-۴۰ \Rightarrow a=-۲$

$a+b=+۶ \xrightarrow{a=-۲} -۲+b=+۶ \Rightarrow b=۸$

$-۲x^۲+۸x-۶=۰ \quad x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{-۲\times ۲}=۲ , y_s=\frac{-b^۲+۴ac}{۴a}=\frac{-۶۴+۴\times -۲\times -۶}{۴\times -۲}=۲$

رأس سهمی (۲ , ۲) می‌باشد. (الله‌دادی) (فصل چهارم ـ دروس اول و دوم ـ معادله درجه دوم و مختصات رأس سهمی)

۶- گزینه «۲» ـ

$$۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha} \Rightarrow \sqrt{۱+\cot^۲\alpha}-\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲\alpha}}-\sqrt{\frac{(۱-\cos\alpha)(۱-\cos\alpha)}{(۱+\cos\alpha)(۱-\cos\alpha)}}=\frac{۱}{|\sin\alpha|}-\frac{(۱-\cos\alpha)}{|\sin\alpha|}$$

$$\xrightarrow[\sin\alpha<۰]{\text{چون } \alpha \text{ در ربع چهارم است}} -\frac{۱}{\sin\alpha}+\frac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cot\alpha$$

(سراسری تجربی ۷۵) (فصل دوم ـ درس سوم ـ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی)

۷- گزینه «۱» ـ سه عدد متوالی می‌توانند $n+۲$ و $n+۱$ و n باشند و مربع مجموع این سه عدد برابر است با:

$(n+n+۱+n+۲)^۲=(۳n+۳)^۲=۹n^۲+۹+۱۸n$

$۹n^۲+۱۸n+۹=۳۲۴ \Rightarrow ۹n^۲+۱۸n-۳۱۵=۰$

$n^۲+۲n-۳۵=۰ \quad n=\frac{-۲\pm\sqrt{۴+۱۴۰}}{۲}=\begin{cases} ۵ \text{ ق . ق} \\ -۷ \text{ غ . ق . ق}\end{cases}$

مجموع سه عدد $= ۵+۶+۷=۱۸$

(الله‌دادی) (فصل اول ـ درس چهارم ـ معادله درجه دوم و روش حل آن)

۸- گزینه «۴» ـ x عددی بین صفر و یک است، بنابراین هرچه به توان کوچکتر برسد عدد بزرگتری حاصل می‌شود. همچنین a حتماً ریشه زوج x بوده است، بنابراین:

b می‌تواند ریشه سوم a , c ریشه چهارم و d ریشه پنجم باشد. (الله‌دادی) (فصل سوم ـ درس اول ـ ریشه و توان)

۹- گزینه «۲» ـ دو نقطه روی سهمی که دارای عرض یکسانند، عمود منصف خط واصل این دو نقطه، خط تقارن سهمی است.

$x=\frac{۶-۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ خط تقارن سهمی)

۱۰- گزینه «۴» ـ

$$\frac{x}{x-۳}+\frac{x}{x+۳}-\frac{۹}{x^۲-۹}-۲=\frac{x(x+۳)}{x^۲-۹}+\frac{x(x-۳)}{x^۲-۹}-\frac{۹}{x^۲-۹}-۲ \Rightarrow \frac{\cancel{x^۲}+\cancel{۳x}+\cancel{x^۲}-\cancel{۳x}-۹-\cancel{۲x^۲}+۱۸}{x^۲-۹}=\frac{۹}{x^۲-۹}$$

(الله‌دادی) (فصل سوم ـ درس چهارم ـ ساده کردن عبارات گویا رأس)

۱۱- گزینه «۳» ـ اگر تعداد تیم‌ها برابر n باشد در کل $n(n-۱)$ بازی انجام شده اما چون بازی‌ها به‌طور رفت و برگشت انجام شده، باید عدد حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}=۴۵ \Rightarrow n^۲-n=۹۰ \Rightarrow n^۲-n-۹۰=۰ \Rightarrow n=\frac{۱\pm\overset{۱۹}{\sqrt{\cancel{۱+۳۶۰}}}}{۲}=\begin{cases} ۱۰ \text{ ق . ق} \\ -۹ \text{ غ . ق . ق}\end{cases}$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ درس اول ـ معادله درجه دوم و روش‌های حل آن)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B) \xrightarrow{n(U)=n(A)+n(A')}$

$=\cancel{n(A)}+n(A')-\cancel{n(A)}-n(B)+n(A\cap B)=۱۵-۱۲+۹=۱۲$

(الله‌دادی) (فصل یکم ـ درس دوم ـ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه)

۱۳- گزینه «۳» ـ

مساحت شکل : $S_{\text{مستطیل}}+S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}x\times x+۲x=\frac{۱}{۲}x^۲+۲x \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^۲+۲x=۴۸ \Rightarrow x^۲+۴x-۹۶=۰$

$$x=\frac{-۴\pm\overset{۲۰}{\sqrt{\cancel{۱۶+۴\times ۹۶}}}}{۲}=\begin{cases} ۸ \text{ ق . ق} \\ -۱۲ \text{ غ . ق . ق}\end{cases}$$

$AC=\sqrt{۸^۲+۸^۲}=۸\sqrt{۲}$, محیط مثلث $ABC=۱۶+۸\sqrt{۲}$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ درس اول ـ معادله درجه دوم و روش‌های حل آن)

۱۴- گزینه «۴» ـ

صورت کسر: $\frac{\sin^{۷} x}{\cos^{۷} x}\frac{\cos^{۳} x}{\sin^{۳} x}+\frac{\cos^{۱۱} x}{\sin^{۱۱} x}\frac{\sin^{۳} x}{\cos^{۳} x}=\frac{\sin^{۴} x}{\cos^{۴} x}+\frac{\cos^{۸} x}{\sin^{۸} x}=\tan^{۴} x+\cot^{۸} x$

زمانی یک کسر برابر صفر است که صورتش برابر صفر باشد، و صورت کسر حاصل دو عدد به توان زوج است. زمانی این حاصل برابر صفر است که هر دوی آن‌ها صفر باشد اما در جایی‌که $\tan x$ صفر باشد $\cot x$ بی‌نهایت است و بالعکس. بنابراین چنین x ای وجود ندارد.

(الله‌دادی) (فصل دوم ـ درس اول ـ نسبت‌های مثلثاتی صورت کسر را محاسبه می‌کنیم)

۱۵- گزینه «۱» ـ

$$x+y=۱۸ \Rightarrow y=۱۸-x$$

$$xy=۵۶ \Rightarrow x(۱۸-x)=۵۶ \Rightarrow ۱۸x-x^{۲}=۵۶ \Rightarrow x^{۲}-۱۸x+۵۶=۰ \Rightarrow x=\frac{۱۸\pm\sqrt{۳۲۴-۴\times۵۶}}{۲}=\begin{cases}۱۴\\ ۴\end{cases} \Rightarrow |x-y|=۱۰$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ درس اول ـ معادله درجه ۲ و روش‌های حل آن)

۱۶- گزینه «۲» ـ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی را می‌توان به‌صورت: aq و a و $\frac{a}{q}$ نشان داد.

$$\text{حاصل‌ضرب}=۲۱۶ \Rightarrow a^{۳}=۲۱۶ \Rightarrow a=۶$$

$$\text{جمع}=۱۹ \Rightarrow \frac{۶}{q}+۶+۶q=۱۹ \Rightarrow ۶+۶q+۶q^{۲}=۱۹q \Rightarrow ۶q^{۲}-۱۳q+۶=۰ \Rightarrow \Delta=۱۶۹-۱۴۴=۲۵ \Rightarrow \begin{cases}q=\frac{۱۳+۵}{۱۲}=\frac{۳}{۲}\\ q=\frac{۱۳-۵}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=۶\\ q=\frac{۳}{۲}\end{cases} \Rightarrow ۴,۶,۹,\begin{cases}a=۶\\ q=\frac{۲}{۳}\end{cases} \Rightarrow ۹,۶,۴$$

تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد در هر دو حالت برابر ۵ است.

(سراسری تجربی ـ ۹۰) (فصول اول و چهارم ـ درس اول ـ دنباله هندسی و معادله درجه دوم و روش‌های حل آن)

۱۷- گزینه «۴» ـ ابتدا عبارت $\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$ را ساده می‌کنیم:

$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۲^{۳}}}=\sqrt[۶]{۲^{۳}}=\sqrt{۲}$: اکنون می‌توان نوشت

$$(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}})\times\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}})\times\sqrt{۲}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲}\times\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}+\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}=$$

$$\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^{۲}}+\sqrt{(\sqrt{۳}+۱)^{۲}}=\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}+۱=۲\sqrt{۳}$$

(سراسری ریاضی ـ ۹۳) (فصل سوم ـ درس سوم ـ توان‌های گویا)

۱۸- گزینه «۴» ـ چون سهمی تنها در یک نقطه با محور xها تماس دارد بنابراین دارای ریشه مضاعف می‌باشد و $\Delta=۰$ است:

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۹m^{۲}-۴m(m-۵)=۹m^{۲}-۴m^{۲}+۲۰m=۰ \Rightarrow ۵m^{۲}+۲۰m=۰ \Rightarrow \begin{cases}m=۰\\ m=-۴\end{cases}$$

به‌ازای $m=۰$ آن‌گاه معادله دیگر، معادله سهمی نمی‌باشد، بنابراین $m=-۴$. (الله‌دادی) (فصل چهارم ـ درس اول ـ معادله درجه دوم و روش حل آن)

۱۹- گزینه «۳» ـ

$$\frac{x^{۲}-۴x+۶}{(x-۱)(x-۲)}=A-\frac{B}{x-۱}-\frac{C}{x-۲} \Rightarrow \frac{x^{۲}-۴x+۶}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{A(x-۱)(x-۲)-B(x-۲)-C(x-۱)}{(x-۱)(x-۲)}$$

$$x^{۲}-۴x+۶=Ax^{۲}-۳Ax+۲A-Bx+۲B-Cx+C=Ax^{۲}-(۳A+B+C)x+۲A+۲B+C$$

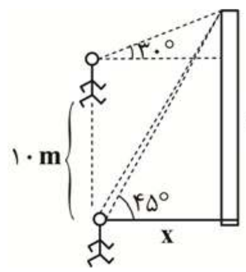
$$A=۱,۳A+B+C=۴ \Rightarrow B+C=۱$$

$$۲A+۲B+C=۶ \Rightarrow ۲B+C=۴ \Rightarrow B=۳,C=-۲$$

$$A+\frac{B}{۲}+\frac{C}{۳}=۱+\frac{۳}{۲}+(\frac{-۲}{۳})=\frac{۶+۹-۴}{۶}=\frac{۱۱}{۶}$$

(الله‌دادی) (فصل سوم ـ درس چهارم ـ ساده کردن عبارات گویا)

۲۰- گزینه «۱» ـ



$$\tan ۴۵°=\frac{y}{x},\tan ۳۰°=\frac{y-۱۰}{x}$$

$$۱=\frac{y}{x} \Rightarrow y=x,\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{y-۱۰}{y}$$

$$\sqrt{۳}y=۳y-۳۰ \Rightarrow ۳۰=y(۳-\sqrt{۳}) \Rightarrow y=\frac{۳۰(۳+\sqrt{۳})}{(۳-\sqrt{۳})(۳+\sqrt{۳})}=\frac{۳۰(۳+\sqrt{۳})}{۹-۳}=۵(۳+\sqrt{۳})$$

(الله‌دادی) (فصل دوم ـ درس اول ـ نسبت‌های مثلثاتی)