

ریاضیات

۱- گزینه «۱» - صفر تابع $f(x)$ عدد ۴ است، پس $f(4) = 0$ است.

$$\frac{4-2x}{3} = 4 \Rightarrow 4-2x = 12 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$$

$$x = -4 \Rightarrow g(-4) = f(4) = 0 \Rightarrow (-4, 0) \in g(x)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تبدیل توابع)

۲- گزینه «۱» -

$$f(x) = (x^2 + 3x^2 + 3x + 1) + (x^2 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$f(x) = 2(x^2 + 3x)$$

هر دو تابع x^2 و $3x$ صعودی اکیداند پس مجموع آنها نیز صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی)

۳- گزینه «۲» - برای آن که $h(x)$ درجه دوم باشد باید ضرب x^2 برابر صفر شود.

$$1 + m = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$m = -1 \Rightarrow g(x) = -x^2 - 1$$

پس درجه $g(x)$ برابر (۲) است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - چند جمله‌ای)

۴- گزینه «۱» -

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2+x) = (2+x)^2 + 2+x = x^2 + 6x^2 + 12x + 8 + 2+x = x^2 + 6x^2 + 13x + 10$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = 2 + x^2 + x$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow x^2 + 6x^2 + 13x + 10 = x^2 + x + 2 \Rightarrow 6x^2 + 12x + 8 = 0 \xrightarrow{+2} 3x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4(3)(4) = 36 - 48 < 0$$
 معادله فاقد ریشه حقیقی است.

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب)

۵- گزینه «۱» -

$$f(g(x)) = x^2 + 6x + 5 \Rightarrow (g(x))^2 - 4g(x) = x^2 + 6x + 5 \xrightarrow{+4} (g(x))^2 - 4g(x) + 4 = x^2 + 6x + 9$$

$$\Rightarrow (g(x) - 2)^2 = (x + 3)^2 \Rightarrow \begin{cases} g(x) - 2 = x + 3 \\ g(x) - 2 = -x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x + 5 \Rightarrow g(1) = 6 \\ g(x) = -x - 1 \Rightarrow g(1) = -2 \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب)

۶- گزینه «۱» -

$$f(x) = \sqrt{4-x}, g(x) = \sqrt{x-3}$$

$$D_f = \{x \mid 4-x \geq 0\} = (-\infty, 4]$$

$$D_g = \{x \mid x-3 \geq 0\} = [3, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 3 \mid \sqrt{x-3} \leq 4\} = \{x \geq 3 \mid x \leq 19\} = [3, 19]$$

اعداد زوج طبیعی بازه عباتند از $\{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ که تعداد آنها ۸ تا است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - دامنه ترکیب دو تابع)

۷- گزینه «۲» -

$$f(x) = 1 \Rightarrow \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{1-x} \xrightarrow{\text{توان دو}} x+4 = 1 + 1 - x + 2\sqrt{1-x}$$

$$\Rightarrow 2x+2 = 2\sqrt{1-x} \xrightarrow{+2} x+1 = \sqrt{1-x} \xrightarrow{\text{توان دو}} x^2 + 2x + 1 = 1 - x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, 3$$

$x = 3$ قابل قبول نیست.

$$f(0) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$$

$$f(1) + f^{-1}(1) = \sqrt{5} + 0 = \sqrt{5}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - وارون)

۸- گزینه «۱» - بایستی رأس سهمی درون بازه $(2, 4)$ قرار گیرد.

$$2 < \frac{a+2}{2} < 4 \xrightarrow{\times 2} 4 < a+2 < 8 \xrightarrow{-2} 2 < a < 6 \Rightarrow a \in (2, 6)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - وارون)

$$f(x) = 4 \sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow \begin{cases} \max f(x) = 4 \\ T_f = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \end{cases}$$

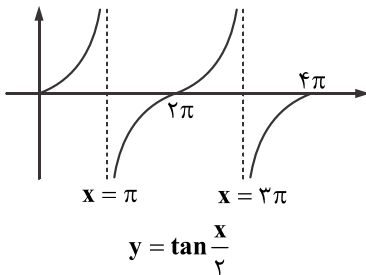
$$g(x) = 6 \cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \max g(x) = 6 \\ T_g = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \end{cases}$$

$$h(x) = -8 \sin(\pi x - 2) \Rightarrow \begin{cases} \max h(x) = 8 \\ T_h = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \end{cases}$$

$$m(x) = \sin(x-1) - 2 \Rightarrow \begin{cases} \max(m(x)) = -1 \\ T_h = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که در تابع g ماکزیمم از دوره تناوب دو واحد بیشتر است. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - تناوب)

۱۰- گزینه «۲» - نمودار تابع $\tan \frac{x}{2}$ در فاصله $[0, 4\pi]$ به صورت زیر است:



این تابع خط $y = 1$ را در دو نقطه قطع می‌کند. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - تابع تانژانت)

۱۱- گزینه «۱» -

$$\cos^2 x = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$	$\pi + \frac{\pi}{8}$

پس جواب‌های مورد قبول $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{5\pi}{8}$ می‌باشند. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - معادله)

۱۲- گزینه «۴» -

$$g(x) = \tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \cot 2x$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = -2 \cot 2x \tan 2x = -2$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - نسبت 2α)

۱۳- گزینه «۴» -

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Rightarrow \text{معادله } 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{فاقد جواب}$$

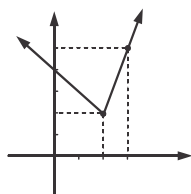
$$2 \leq x \leq \pi \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow |\sin x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \notin [2, \pi] \\ x = \frac{5\pi}{6} \in [2, \pi] \end{cases} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{در بازه } [0, \pi] \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

پس معادله فقط یک جواب $\frac{5\pi}{6}$ دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - معادله)

۱۴- گزینه «۴» -

$$y = |2x - 4| + x$$

x	0	2	3
y	4	2	5



با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ابتدا نزولی اکید سپس صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی)

۱۵- گزینه «۲» -

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{-x}{\sqrt{(x+2)^2}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x}{|x+2|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(-1)^{[x]}}{(x+2)^2} = \begin{cases} \frac{1}{0^+} = +\infty & x \rightarrow (-2)^+ \\ \frac{-1}{0^+} = -\infty & x \rightarrow (-2)^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x|}{(x+2)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

پس حد توابع f و h وقتی $x \rightarrow -2$ برابر $+\infty$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حدنامتناهی)

۱۶- گزینه «۳» - بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{1+x} f(x) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

گزینه «۲»:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

گزینه «۳»:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

گزینه «۴»:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حدبی‌نهایت و حد در بی‌نهایت)

۱۷- گزینه «۲» -

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{x+1-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حدنامتناهی)

۱۸- گزینه «۲» - ریشه‌های مخرج ۱ و -۳ می‌باشند. پس معادله $ax^2 + bx + 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی ۱ و -۳ هستند.

$$S = -\frac{b}{a} = -3 + 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$$

$$P = \frac{c}{a} = -3 \times 1 \Rightarrow \frac{3}{a} = -3 \Rightarrow a = -1, b = -2$$

$$f(x) = \frac{-3}{-x^2 - 2x + 3} = \frac{3}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{(x-1)(x+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حدبی‌نهایت)

۱۹- گزینه «۲» -

$$f(1) = 2 \Rightarrow \frac{4+3+a}{a+1-1} = 2 \Rightarrow 7+a = 2a \Rightarrow a = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{ax^2} = \frac{4}{a} = \frac{4}{7}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد در بی‌نهایت)

۲۰- گزینه «۴» - این حد $\frac{\infty}{\infty}$ است و کافی است عبارت‌های پرتوان صورت و مخرج را انتخاب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - x^2\sqrt{x} + 2x}{x + \sqrt{x} - 3x - 2x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{-2x\sqrt{x}} = \frac{-1}{2}$$

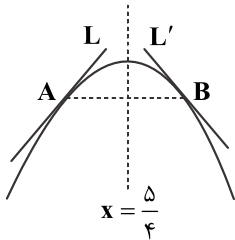
(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد در بی‌نهایت)

۲۱- گزینه «۴» -

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{[-x]}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)} = \frac{-\pi}{(0^+)(1)} = -\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد در بی‌نهایت)

۲۲- گزینه «۱» - به دلیل متقارن بودن نمودار سهمی، خط تقارن عمودمنصف پاره‌خط AB و شیب‌های خط مماس در A و B قرینه یکدیگرند.



$$\frac{-1+x_B}{2} = \frac{\delta}{4} \Rightarrow -1+x_B = \frac{\delta}{2} \Rightarrow x_B = \frac{\delta}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - شیب خط مماس)

۲۳- گزینه «۴» -

$$f(0) = 1 \Rightarrow A(0, 1) \in f(x)$$

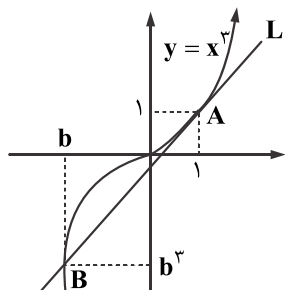
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{خط مماس: } y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1 \xrightarrow{\times 2} 2y = x + 2$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - شیب خط مماس)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x-2)} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} f'(2) = 4 \Rightarrow f'(2) = 8$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{f(2+h) - f(2)} = 2 \times \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}} = \frac{2}{f'(2)} = \frac{2}{8}$$



(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - تعریف مشتق)

۲۵- گزینه «۳» - شیب خط L را حساب می‌کنیم:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

مختصات نقطه B به صورت (b, b^3) است پس:

$$m_{AB} = 3 \Rightarrow \frac{b^3 - 1}{b - 1} = 3 \Rightarrow b^3 + b + 1 = 3 \Rightarrow b^3 + b - 2 = 0 \xrightarrow{b < 0} b = -2$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - خط مماس)