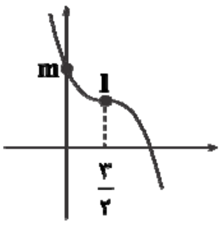
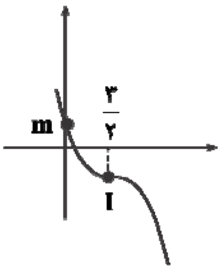
ریاضی

۱- گزینه «۳» ـ ابتدا تابع را مکعب کامل می‌کنیم:

$$f(x)=-x^{۳}+\frac{۹}{۲}x^{۲}-\frac{۲۷}{۴}x+\frac{۲۷}{۸}-\frac{۲۷}{۸}+m=-(x-\frac{۳}{۲})^{۳}+m-\frac{۲۷}{۸}$$

این تابع از تبدیل تابع $x^{۳}$ ساخته شده است و مرکز تقارن آن نقطه $I(\frac{۳}{۲}, m-\frac{۲۷}{۸})$ است. اگر قرار باشد که از ناحیه سوم عبور نکند باید مقدار ثابت آن یعنی m نامنفی باشد. برای فهم بهتر نمودار آن را نیز ببینید:

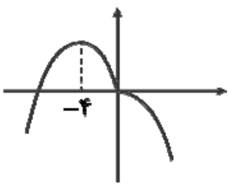




$$f(۰)=m\geq ۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (متوسط)

۲- گزینه «۴» ـ نمودار ضابطه اول یعنی $-x^{۲}-۸x$ یک سهمی به طول راس ۴- است. ضابطه دوم هم قرینه تابع $x^{۳}$ نسبت به محور xهاست.
نمودار تابع به صورت زیر است:

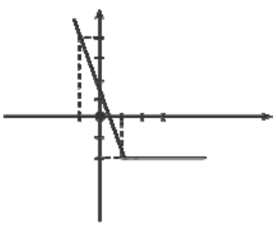


تابع در فاصله $[-۴, +\infty)$ نزولی اکید است. پس حداقل مقدار a برابر ۴- است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (آسان)

۳- گزینه «۴» ـ

x	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	-۲	-۲



با توجه به نمودار $f(x)$ تابعی نزولی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (متوسط)

۴- گزینه «۳» ـ

$$(fog)(x)=T \Rightarrow T^{۲}+T-۲\leq ۰ \Rightarrow -۲\leq T\leq ۱ \Rightarrow -۲\leq (fog)(x)\leq ۱ \Rightarrow -۲\leq ۴(x+۲)-۱\leq ۱$$

$$\xrightarrow{+۱} -۱\leq ۴(x+۲)\leq ۲ \xrightarrow{\div ۴} \frac{-۱}{۴}\leq x+۲\leq \frac{۱}{۲} \xrightarrow{-۲} -\frac{۹}{۴}\leq x\leq -\frac{۳}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (متوسط)

۵- گزینه«۲» ـ

$$f(x)=x+۲ \Rightarrow f^{-۱}(x)=x-۲$$

$$g(x)=x-۴ \Rightarrow g^{-۱}(x)=x+۴$$

$$h(x)=f^{-۱}(x)\times g^{-۱}(x)=(x-۲)(x+۴)=x^{۲}+۲x-۸$$

$$y=h(x)=(x+۱)^{۲}-۹ \Rightarrow (x+۱)^{۲}=y+۹ \Rightarrow |x+۱|=\sqrt{y+۹}$$

$$\xrightarrow{x\leq -۱} x+۱=-\sqrt{y+۹} \Rightarrow x=-۱-\sqrt{y+۹} \Rightarrow h^{-۱}(x)=-۱-\sqrt{x+۹}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ وارون) (متوسط)

۶- گزینه «۲» ـ

$$f = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۳) , (۳ , ۵) , (۴ , ۷)\}$$

$$f^{۲} = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۹) , (۳ , ۲۵) , (۴ , ۴۹)\}$$

$$f - ۴ = \{(۱ , -۳) , (۲ , -۱) , (۳ , ۱) , (۴ , ۳)\}$$

$$f^{۲}o(f - ۴) = \{(۳ , ۱) , (۴ , ۲۵)\}$$

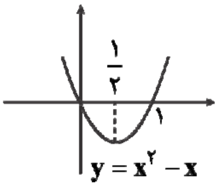
مجموع اعضای برد تابع ۲۶ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (آسان)

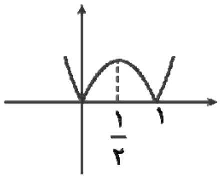
۷- گزینه «۳» ـ برای $x \in D_f$ همواره $(f^{-۱}of)(x) = x$ است.

$$f(x) = \log x \Rightarrow D_f = (۰ , +\infty)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ وارون) (متوسط)

۸- گزینه «۳» ـ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:





$f(x) = |x^{۲} - x|$

تابع در بازه $(۰ , \frac{۱}{۲})$ یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. (نصیری) (پایه دوازدهم-تابع –قدرمطلق و وارون) (آسان)

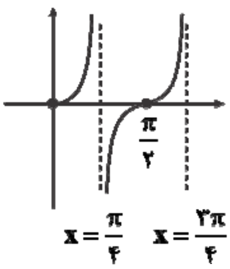
۹- گزینه «۱» ـ اگر این تابع بر خط $y = ۱$ مماس باشد، آن‌گاه ماکزیمم یا مینمم تابع برابر ۱ خواهد بود.

$$a + ۳ + ۱ = ۱ \Rightarrow a = -۳ \Rightarrow y = \cos\frac{x}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = ۶\pi$$

$$a + ۳ - ۱ = ۱ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow y = ۲ + \cos x \Rightarrow T = ۲\pi$$

پس بیشترین مقدار دوره تناوب ۶π است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب) (متوسط)

۱۰- گزینه «۱» ـ نمودار تابع $\tan ۲x$ به صورت زیر است:



اگر تابع $\tan ۲x$ در فاصله $[۰ , a)$ صعودی اکید باشد حداکثر مقدار a برابر $\frac{\pi}{۴}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تابع تانژانت) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» ـ

$$\sin^{۲} ۸x = ۱ - \cos^{۲} x \Rightarrow \sin^{۲} ۸x = \sin^{۲} x \Rightarrow ۸x = k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} ۸x = k\pi + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۷} \\ ۸x = k\pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۹} \end{cases}$$

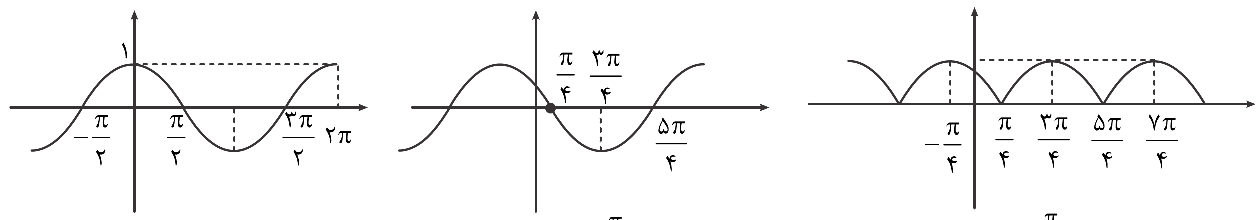
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» ـ با توجه به نمودار، ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس $|a| = ۳$ است. ضمناً $۱\frac{۱}{۴}$ برابر دوره تناوب ۸ است.

$$(۱\frac{۱}{۴})T = ۸ \Rightarrow T = \frac{۳۲}{۵} = \frac{۲\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b| = \frac{۵}{۱۶} \Rightarrow |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{۳}{\frac{۵}{۱۶}} = \frac{۴۸}{۵} = ۹/۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ نمودار مثلثاتی و دوره تناوب) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» ـ نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



$y = \cos x$ $\qquad$ $y = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$ $\qquad$ $y = |\cos(x + \frac{\pi}{۴})|$

با توجه به شکل تابع در بازه $[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}]$ نزولی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم- مثلثات و تابع –انتقال و قدرمطلق) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» ـ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cos ۲x}{\frac{۱}{\cos^۲ x}} = \sin x \cos x \cos ۲x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x \cos ۲x \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۴}\sin ۴x \;\Rightarrow\; T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب) (آسان)

۱۵- گزینه «۴» ـ

$$y = ۱ - \sin^۲ x + \sin x = -\sin^۲ x + \sin x + ۱$$

$$\begin{cases} \sin x = ۱ \;\Rightarrow\; y = ۱ \\ \sin x = -۱ \;\Rightarrow\; y = -۱ \\ \sin x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۱}{۲} \;\Rightarrow\; y = -\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۵}{۴} \end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع برابر -۱ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ برد تابع مثلثاتی) (دشوار)

۱۶- گزینه «۳» ـ

$$f(x) = \sin^۶ x + \cos^۶ x = (\sin^۲ x + \cos^۲ x)^۳ - ۳\sin^۲ x \cos^۲ x(\sin^۲ x + \cos^۲ x)$$

$$\Rightarrow\; f(x) = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x = ۱ - \frac{۳}{۴} \times \frac{۱ - \cos ۴x}{۲} = ۱ - \frac{۳}{۴}(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۴x) = \frac{۵}{۸} + \frac{۳}{۸}\cos ۴x$$

$$f(\frac{\pi}{۲۴}) = \frac{۵}{۸} + \frac{۳}{۸}\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{۵}{۸} + \frac{۳}{۸} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۰ + ۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ نسبت‌های ۲α) (دشوار)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(f(x))) = \lim_{x \to ۲^-} f(f(x)) = \lim_{x \to ۰^-} f(x) = +\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت) (آسان)

۱۸- گزینه «۲» ـ برای محاسبه $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ کافی است که جمله پرتوان زیر رادیکال‌ها را انتخاب کنیم:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[۳]{(۲x)(x^۲)(۴x^۲)}}{۲x\sqrt[۳]{x \times x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۲\sqrt[۳]{x^۵}}{۲x\sqrt[۳]{x^۲}} = ۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت) (آسان)

۱۹- گزینه «۱» ـ

$$x + ۴ = ۰ \;\Rightarrow\; x = -۴$$

$$g(x) = f(x + ۱) \;،\; g(-۴) = ۰ \;\Rightarrow\; f(-۳) = ۰$$

$$h(x) = f(۲x - ۱) \;،\; h(-۴) = f(-۹) = ۰$$

چون $f(-۹) = f(-۳) = ۰$ است پس $f(x)$ بر $(x + ۳)$ و $(x + ۹)$ بخش‌پذیر و در نتیجه بر $(x + ۹)(x + ۳)$ بخش‌پذیر است، پس باقی‌مانده صفر خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تقسیم) (متوسط)

۲۰- گزینه «۳» ــ

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{[-x][x]+۵}{x^۲-۴}=\frac{-۳\times ۲+۵}{۴^+-۴}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

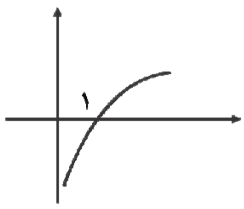
(نصیری) (پایه دوازدهم ــ حد ــ حد بی‌نهایت) (متوسط)

۲۱- گزینه «۳» ــ

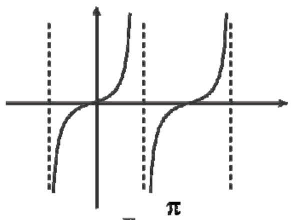
$$\lim_{x\to \pi^+}\frac{[x]+a}{\sin x}=\frac{۳+a}{۰^-}=+\infty \Rightarrow ۳+a<۰ \Rightarrow a<-۳$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ حد ــ حد بی‌نهایت) (متوسط)

۲۲- گزینه «۴» ــ نمودار دو تابع $\tan x$ و $\log x$ را رسم می‌کنیم و حدهای خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.



$$\lim_{x\to ۰^+}\log x=-\infty$$



$$x=\frac{\pi}{۲}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\tan x=-\infty$$

و اما دو حد دیگر:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{۲}}{|x|}=\frac{۱-\sqrt{۲}}{۰^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۲}-\sqrt[۳]{۳}}{-x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۶]{۸}-\sqrt[۶]{۹}}{-x^۲}=\frac{\sqrt[۶]{۸}-\sqrt[۶]{۹}}{۰^-}=+\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ حد ــ حد بی‌نهایت) (متوسط)

۲۳- گزینه «۱» ــ خط مماس مورد نظر شیب منفی دارد و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۴ قطع کرده است، پس $۵x+y=۲۰$ درست است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ مشتق ــ خط مماس) (آسان)

۲۴- گزینه «۴» ــ معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$m_L=\tan ۴۵^\circ=۱ \Rightarrow f'(۴)=۱$$

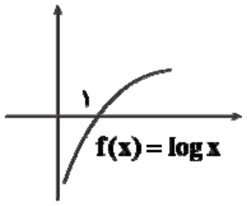
$$L: y+۱=x \xrightarrow{x=۴} y=۳ \Rightarrow f(۴)=۳$$

$$g'(x)=\lim_{x\to ۴}\frac{(x^۲+f(x))-(۴^۲+f(۴))}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x^۲-۱۶)+(f(x)-f(۴))}{x-۴}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(x^۲-۱۶)}{x-۴}+\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}(x+۴)+f'(۴)=۸+۱=۹$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ مشتق ــ تعریف مشتق) (متوسط)

۲۵- گزینه «۱» ــ روی تابع $\log x$ هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که مماس در آن‌ها موازی محور xها باشد.(نمودار آن را ببینید.)



(نصیری) (پایه دوازدهم ــ مشتق ــ مفهوم مشتق) (آسان)