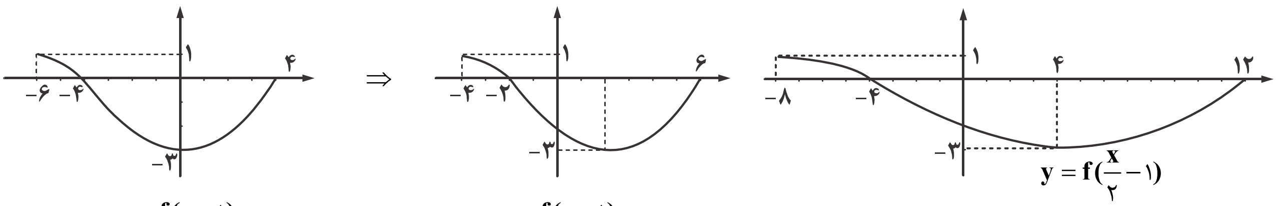
حسابان

۱- گزینه «۳» ـ



$y = f(x+1)$ $y = f(x-1)$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تبدیل نمودار تابع)

۲- گزینه «۳» ـ می‌دانیم تابع $y = \log_a x$ به‌ازای $b > 1$، تابع صعودی است و چون $\sqrt{2} > 1$، داریم:

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+1}) < \log_{\sqrt{2}}(x+2) \Rightarrow \sqrt{x+1} < x+2 \Rightarrow x+1 < x^2+4x+4$$

$$\Rightarrow x^2+3x+3 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.} \Rightarrow x \in R \quad (1)$$

از طرف دیگر دامنه نامعادله برابر است با: $x \in (-1, +\infty) \quad (2)$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} x \in (-1, +\infty)$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توابع صعودی و نزولی)

۳- گزینه «۲» ـ

$$y = f(|x-1|) = \begin{cases} f(x-1) & x \geq 1 \\ f(-(x-1)) & x < 1 \end{cases}$$

برای رسم نمودار $y = f(|x-1|)$ ابتدا نمودار f را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، سپس قسمتی از نمودار که در سمت چپ خط $x = 1$ وجود دارد را حذف کرده و قرینه قسمت باقی‌مانده را نسبت به خط $x = 1$ رسم می‌کنیم.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تبدیل نمودار تابع)

۴- گزینه «۱» ـ با کمک فرمول $(x^n - y^n) = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$ داریم:

$$x^{15} - 32 = (x^3)^5 - 2^5 = (x^3 - 2)(x^{12} + 2x^9 + 4x^6 + 8x^3 + 16)$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری)

۵- گزینه «۳» ـ $f(x)$ بر $3x+1$ بخش‌پذیر است، پس $f(\frac{-1}{3}) = 0$

$$f(-\frac{1}{3}) = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}a - \frac{2}{3} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{2}{3}a \Rightarrow a = \frac{25}{6}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ بخش‌پذیری)

۶- گزینه «۳» ـ بررسی گزینه‌ها:

در گزینه «۴»، کمترین مقدار تابع -1 است، اما در نمودار داده شده، کمترین مقدار تابع صفر است. پس این گزینه رد می‌شود.

گزینه «۱» و «۲» در همسایگی راست صفر صعودی هستند، پس این گزینه‌ها هم حذف می‌شوند. بنابراین گزینه «۳» درست است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توابع صعودی و نزولی و فصل دوم ـ درس اول ـ نمودار توابع مثلثاتی)

۷- گزینه «۱» ـ با توجه به نمودار دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi$$

بنابراین گزینه‌های «۳» و «۴» رد می‌شوند. در گزینه «۱»، به‌ازای $x = \frac{\pi}{6}$ داریم $y = 1$ و در گزینه «۲» به‌ازای $x = \frac{\pi}{6}$ داریم $y = -\frac{1}{2}$. بنابراین گزینه «۲» هم رد می‌شود و تنها گزینه ممکن گزینه «۱» است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۸- گزینه «۲» ـ با توجه به نمودار داریم: $a=-2$

به‌ازای $x=\frac{27\pi}{5}$، داریم $y=-2$.

$$-2=-2\cos(\frac{27\pi}{5}b+c) \Rightarrow \frac{27\pi}{5}b+c=2\pi$$

نقطه $x=\frac{9\pi}{10}$، اولین نقطه‌ای است که کسینوس در آن صفر شده است. بنابراین:

$$\frac{9\pi}{10}b+c=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases}\frac{27\pi}{5}b+c=2\pi \\ \frac{9\pi}{10}b+c=\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow b=\frac{1}{3}, c=\frac{\pi}{5} \Rightarrow abc=\frac{-2\pi}{15}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۹- گزینه «۱» ـ با توجه به اینکه تابع $y=\tan x$ در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ تعریف نشده است. و همچنین تابع $\tan x$ در هر بازه‌ای که تعریف می‌شود صعودی اکید است. تابع $\tan x$ در بازه $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ در بین گزینه‌ها تعریف می‌شود. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تانژانت)

۱۰- گزینه «۱» ـ

$$5\sin x=3\cos x+3 \Rightarrow 5\sin x=3(\cos x+1) \Rightarrow 5\times 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=3(2\cos^2\frac{x}{2}) \xrightarrow[\cos\frac{x}{2}\neq 0]{\div 2\cos^2\frac{x}{2}} 5\tan\frac{x}{2}=3$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{2}=\frac{3}{5} \Rightarrow \tan^2\frac{x}{2}+3\tan\frac{x}{2}-4=\frac{9}{25}+\frac{9}{5}-4=-\frac{46}{25}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان)

۱۱- گزینه «۴» ـ

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=-\cos\frac{x}{3} \\ -\cos\frac{x}{3}=-\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3})=\sin(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2})\end{cases} \Rightarrow \sin\frac{x}{2}=\sin(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases}\frac{x}{2}=2k\pi+\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=12k\pi-3\pi \\ \frac{x}{2}=2k\pi+\pi-\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{12k\pi}{5}+\frac{9\pi}{5}\end{cases}$$

تنها جواب معادله در بازه $[0, 2\pi]$، $x=\frac{9\pi}{5}$ است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۲- گزینه «۲» ـ

$$-\cos 2x+3\sin x+2=0 \Rightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0 \Rightarrow \begin{cases}\sin x=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2} \\ \sin x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۳- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2, \frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}=2 \Rightarrow 2x^2-x-1=2x^2+2x+2 \Rightarrow x=-1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ مجانب افقی)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\sin^3\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin^3\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x\sin^3\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(-2\sin^2\frac{x}{2})}{\cos x\sin^3\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos x\sin^3\frac{x}{2}}=-4$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حد توابع کسری)

۱۵- گزینه «۳» ـ با توجه به این که تابع f در نقطه $x=-1$ تعریف نشده و حد آن برابر است با:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{1-x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)}{(1-x)(1+x)}=-2$$

بنابراین گزینه‌های «۱» و «۴» صحیح نیست. همچنین داریم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x-3}{1-x^2}=\frac{-4}{0^-}=+\infty \\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x-3}{1-x^2}=\frac{-4}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

محاسبات نشان می‌دهد که گزینه «۱» نمودار مورد نظر است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حد بی‌نهایت)

۱۶- گزینه «۱» ـ

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{[x-1]}{\sqrt{x}-x} = \dfrac{[1^-]-1}{\sqrt{1^-}-1^-} = \dfrac{0-1}{0^+} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

حد راست: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{[x-1]}{\sqrt{x}-x} = \dfrac{[1^+]-1}{\sqrt{1^+}-1^+} = \dfrac{1-1}{0^-} = \dfrac{\overset{\text{مطلق}}{0}}{0^-} = 0$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حد بی‌نهایت)

۱۷- گزینه «۱» ـ چون حاصل حد برابر یک عدد حقیقی غیرصفر شده است پس:

$$\begin{cases} b+1=2 \\ \dfrac{m-1}{2}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ m=9 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{m+b-11}{x^2+8x-m} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{(x-1)(x+9)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم و اول ـ حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}-\sqrt[3]{1+3x^2}}{2x-\sqrt[3]{3-x^3}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|2x|}{2x+x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{3x} = \frac{-2}{3}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ حد در بی‌نهایت)

۱۹- گزینه «۲» ـ

$x^2-x-12=0 \Rightarrow$

x		-3		4	
x^2-x-12	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to (-3)^+} f(x) = \frac{-7}{0^-} = +\infty$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حد بی‌نهایت)

۲۰- گزینه «۴» ـ

الف) $\lim\limits_{x\to +\infty} (f[f(x)]) = f[1^-] = f(0) = 1$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(f(x)) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$

بنابراین فقط مورد (پ) درست محاسبه شده بودند. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ حد در بی‌نهایت)