حسابان

۱- گزینه «۲» ـ برای آن‌که $h(x)$ درجه دوم باشد باید ضریب $x^۳$ برابر صفر شود.

$$۱+m=۰ \Rightarrow m=-۱$$

$$m=-۱ \Rightarrow g(x)=-x^۲-۱$$

پس درجه $g(x)$ برابر (۲) است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ چندجمله‌ای)

۲- گزینه «۱» ـ صفرِ تابع $f(x)$ عدد ۴ است، پس $f(۴)=۰$ است.

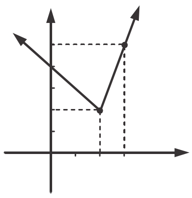
$$\frac{۴-۲x}{۳}=۴ \Rightarrow ۴-۲x=۱۲ \Rightarrow ۲x=-۸ \Rightarrow x=-۴ \Rightarrow g(-۴)=f(۴)=۰ \Rightarrow (-۴,۰)\in g(x)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع)

۳- گزینه «۴» ـ

$$y=|۲x-۴|+x$$

x	۰	۲	۳
y	۴	۲	۵



با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ابتدا نزولی اکید سپس صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی)

۴- گزینه «۱» ـ باقیمانده را $R(x)=Ax+B$ و خارج قسمت $Q(x)$ فرض می‌کنیم. طبق رابطه تقسیم داریم:

$$x^{۱۶}+x^{۱۵}-۱=(x^۲+x)Q(x)+Ax+B$$

رابطه بالا یک اتحاد است و اتحاد به ازای هر x برقرار می‌باشد.

$$x=۰ \Rightarrow -۱=B$$

$$x=-۱ \Rightarrow ۱-۱-۱=-A+B \Rightarrow A=۰$$

پس باقیمانده برابر ۱− است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تقسیم)

۵- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=۴\sin(\frac{\pi x}{۲}+\frac{\pi}{۸}) \Rightarrow \begin{cases} \max f(x)=۴ \\ T_f=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴ \end{cases}$$

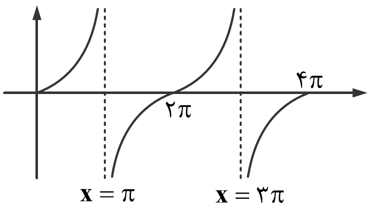
$$g(x)=۶\cos(\frac{\pi x}{۲}-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow \begin{cases} \max g(x)=۶ \\ T_g=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴ \end{cases}$$

$$h(x)=-۸\sin(\pi x-۳) \Rightarrow \begin{cases} \max h(x)=۸ \\ T_h=\frac{۲\pi}{\pi}=۲ \end{cases}$$

$$m(x)=\sin(x-۱)-۲ \Rightarrow \begin{cases} \max(m(x))=-۱ \\ T_h=\frac{۲\pi}{۱}=۲\pi \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که در تابع g ماکزیمم از دوره تناوب دو واحد بیشتر است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تناوب)

۶- گزینه «۲» ـ نمودار تابع $\tan\frac{x}{2}$ در فاصله $[0, 4\pi]$ به‌صورت زیر است:



$y = \tan\frac{x}{2}$

این تابع خط $y = 1$ را در دو نقطه قطع می‌کند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تابع تانژانت)

۷- گزینه «۱» ـ

$$\cos^2 x = \sin^2 x + 2\sin x\cos x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x \in \varnothing \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$	$\pi + \frac{\pi}{8}$

پس جواب‌های مورد قبول $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{5\pi}{8}$ می‌باشند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله)

۸- گزینه «۴» ـ

$0 \le x < 2 \Rightarrow 0 \le \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = 0 \Rightarrow$ معادله: $1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ فاقد جواب

$$2 \le x \le \pi \Rightarrow 1 \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow [\frac{x}{2}] = 1 \Rightarrow |\sin x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \notin [2, \pi] \\ x = \frac{5\pi}{6} \in [2, \pi] \end{cases} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{در بازه } [0, \pi] \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

پس معادله فقط یک جواب $\frac{5\pi}{6}$ دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله)

۹- گزینه «۱» ـ

$$\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$(\tan x + 1)(\tan x + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \dots \\ x = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \dots \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادلات)

۱۰- گزینه «۳» ـ بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»:

$$\lim_{x \to 1} \frac{-x}{1 + x} f(x) = -\frac{1}{2} \lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$$

گزینه «۲»:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

گزینه «۳»:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

گزینه «۴»:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت)

۱۱- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x^۲-۱}=\frac{x+۱-۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{x}{(x-۱)(x+۱)}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۱}{\circ^-}=-\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حدنامتناهی)

۱۲- گزینه «۲» ـ ریشه‌های مخرج ۱ و ۳- می‌باشند. پس معادله $ax^۲+bx+۳=\circ$ دارای دو ریشه حقیقی ۱ و ۳- هستند.

$$S=-\frac{b}{a}=-۳+۱ \Rightarrow \frac{b}{a}=۲ \qquad P=\frac{c}{a}=-۳\times ۱ \Rightarrow \frac{۳}{a}=-۳ \Rightarrow a=-۱, b=-۲$$

$$f(x)=\frac{-۳}{-x^۲-۲x+۳}=\frac{۳}{x^۲+۲x-۳}=\frac{۳}{(x-۱)(x+۳)} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\frac{۳}{\circ^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to (-۳)^-} f(x)=\frac{۳}{\circ^+}=+\infty\end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حدبی‌نهایت)

۱۳- گزینه «۲» ـ

$$f(۱)=۲ \Rightarrow \frac{۴+۳+a}{a+۱-۱}=۲ \Rightarrow ۷+a=۲a \Rightarrow a=۷$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^۲}{ax^۲}=\frac{۴}{a}=\frac{۴}{۷}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت)

۱۴- گزینه «۴» ـ این حد $\frac{\infty}{\infty}$ است و کافی است عبارت‌های پرتوان صورت و مخرج را انتخاب کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt[۳]{x}+۲x}{x+\sqrt{x}-۳x-۳x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{-۳x\sqrt{x}}=\frac{-۱}{۳}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت)

۱۵- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{[-x]}{\sin^۲ x(۱-\sin^۲ x)}=\frac{-۴}{(\circ^+)(۱)}=-\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت)

۱۶- گزینه «۱» ـ

$$x^۲-۶x+۹=\circ \Rightarrow (x-۳)^۲=\circ \Rightarrow x=۳=a+۴ \Rightarrow a=-۱ \Rightarrow f(x)=\frac{-x^۲+۳x-۱}{x^۲-۶x+۹}$$

$\lim\limits_{x\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\pm\infty}\frac{-x^۲}{x^۲}=-۱ \Rightarrow y=-۱$ مجانب افقی

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حدـ مجانب)