حسابان

۱- گزینه «۱» ـ چون $f(x)$ از مبدا مختصات عبور می‌کند، $f(۰)=۰$ است.

$$f(x^{۲}-|x|)\le f(۰) \xrightarrow{f \text{ صعودی است}} x^{۲}-|x|\le ۰ \Rightarrow |x|^{۲}-|x|\le ۰$$

$$\Rightarrow |x|(|x|-۱)\le ۰ \xrightarrow[x=۰]{|x|\ge ۰} |x|\le ۱ \Rightarrow -۱\le x\le ۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (متوسط)

۲- گزینه «۴» ـ با توجه به نمودار داده شده بایستی مخرج کسر ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\text{مخرج } \Delta=۰ \Rightarrow ۱+۴m=۰ \Rightarrow m=-\frac{۱}{۴}$$

$$m=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{-\frac{۱}{۴}x^{۲}-x-۱}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}}{-\frac{۱}{۴}x^{۲}}=-۴ \Rightarrow y=-۴ \text{ (مجانب افقی)}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ مجانب) (متوسط)

۳- گزینه «۱» ـ

$$\tan ۴x \tan ۳x=۱ \Rightarrow \tan ۴x=\frac{۱}{\tan ۳x}=\cot ۳x \Rightarrow \tan ۴x=\tan(\frac{\pi}{۲}-۳x)$$

$$\Rightarrow ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-۳x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۷}+\frac{\pi}{۱۴}=(۲k+۱)\frac{\pi}{۱۴}$$

پس مضارب فرد $\frac{\pi}{۱۴}$ جواب مسئله است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی) (متوسط)

۴- گزینه «۳» ـ نکته: برای دو زاویه x و y داریم:

$$x+y=۴۵^\circ \Rightarrow \tan x+\tan y+\tan x\tan y=۱$$

$$(۲۰^\circ-\alpha)+(۲۵^\circ+\alpha)=۴۵^\circ \Rightarrow \tan(۲۰^\circ-\alpha)+\tan(۲۵^\circ+\alpha)+\tan(۲۰^\circ-\alpha)\tan(۲۵^\circ+\alpha)=۱$$

$$\Rightarrow ۴+\tan(۲۵^\circ+\alpha)+۴\tan(۲۵^\circ+\alpha)=۱ \Rightarrow \tan(۲۵^\circ+\alpha)=\frac{-۳}{۵}$$

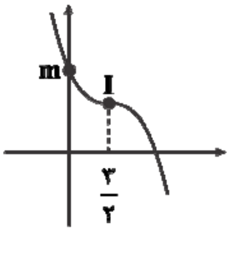
$$\Rightarrow \tan(۵۰^\circ+۲\alpha)=\tan ۲(۲۵^\circ+\alpha)=\frac{۲\tan(۲۵^\circ+\alpha)}{۱-\tan^{۲}(۲۵^\circ+\alpha)}=\frac{۲\times\frac{-۳}{۵}}{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\frac{\frac{-۶}{۵}}{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{-۳۰}{۱۶}=\frac{-۱۵}{۸}$$

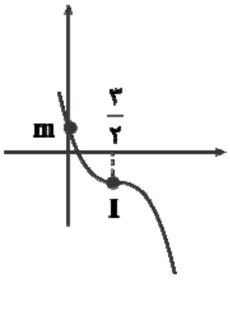
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ روابط $\alpha+\beta$) (دشوار)

۵- گزینه «۳» ـ ابتدا تابع را مکعب کامل می‌کنیم:

$$f(x)=-x^{۳}+\frac{۹}{۲}x^{۲}-\frac{۲۷}{۴}x+\frac{۲۷}{۸}-\frac{۲۷}{۸}+m=-(x-\frac{۳}{۲})^{۳}+m-\frac{۲۷}{۸}$$

این تابع از تبدیل تابع $x^{۳}$ ساخته شده است و مرکز تقارن آن نقطه $I(\frac{۳}{۲}, m-\frac{۲۷}{۸})$ است. اگر قرار باشد که از ناحیه سوم عبور نکند باید مقدار ثابت آن یعنی m نامنفی باشد. برای فهم بهتر نمودار آن را نیز ببینید:

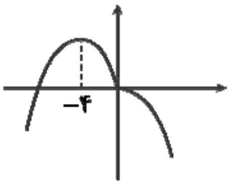




$$f(۰)=m\ge ۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (متوسط)

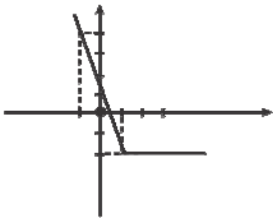
۶- گزینه «۴» ـ نمودار ضابطه اول یعنی $-x^{۲}-۸x$ یک سهمی به طول راس ۴- است. ضابطه دوم هم قرینه تابع $x^{۳}$ نسبت به محور xهاست. نمودار تابع به صورت زیر است:



تابع در فاصله $(-۴ , +\infty]$ نزولی اکید است. پس حداقل مقدار a برابر ۴- است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (آسان)

۷- گزینه «۴» ـ

x	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	-۲	-۲



با توجه به نمودار $f(x)$ تابعی نزولی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (متوسط)

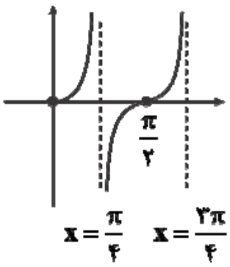
۸- گزینه «۱» ـ اگر این تابع بر خط $y=۱$ مماس باشد، آن‌گاه ماکزیمم یا مینمم تابع برابر ۱ خواهد بود.

$$a+۳+۱=۱ \Rightarrow a=-۳ \Rightarrow y=\cos\frac{x}{۳} \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}}=۶\pi$$

$$a+۳-۱=۱ \Rightarrow a=-۱ \Rightarrow y=۲+\cos x \Rightarrow T=۲\pi$$

پس بیشترین مقدار دوره تناوب ۶π است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب) (متوسط)

۹- گزینه «۱» ـ نمودار تابع $\tan ۲x$ به صورت زیر است:



اگر تابع $\tan ۲x$ در فاصله $[۰ , a)$ صعودی اکید باشد حداکثر مقدار a برابر $\frac{\pi}{۴}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تابع تانژانت) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$\sin^{۲} ۸x=۱-\cos^{۲} x \Rightarrow \sin^{۲} ۸x=\sin^{۲} x \Rightarrow ۸x=k\pi\pm x \Rightarrow \begin{cases} ۸x=k\pi+x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۷} \\ ۸x=k\pi-x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۹} \end{cases}$$

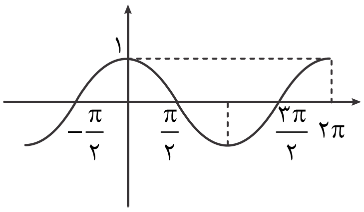
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» ـ با توجه به نمودار، ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس $|a|=۳$ است. ضمناً $۱\frac{۱}{۴}$ برابر دوره تناوب ۸ است.

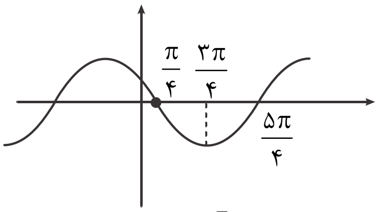
$$(۱\frac{۱}{۴})T=۸ \Rightarrow T=\frac{۳۲}{۵}=\frac{۲\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b|=\frac{۵}{۱۶} \Rightarrow |\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}=\frac{۳}{\frac{۵}{۱۶}}=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ نمودار مثلثاتی و دوره تناوب) (متوسط)

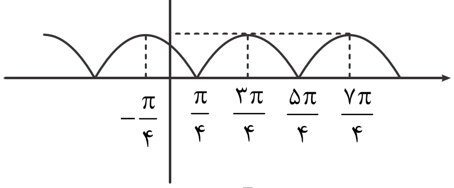
۱۲- گزینه «۲» ـ نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



$y=\cos x$



$y=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$



$y=|\cos(x+\frac{\pi}{۴})|$

با توجه به شکل تابع در بازه $[-\frac{\pi}{۴} , \frac{\pi}{۴}]$ نزولی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات و تابع انتقال و قدرمطلق) (متوسط)

۱۳- گزینه «۱» ـ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cos 2x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}\sin 4x \;\Rightarrow\; T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب) (آسان)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$y=1-\sin^2 x+\sin x=-\sin^2 x+\sin x+1$$

$$\begin{cases}\sin x=1 \Rightarrow y=1\\ \sin x=-1 \Rightarrow y=-1\\ \sin x=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{4}\end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع برابر -1 است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ برد تابع مثلثاتی) (دشوار)

۱۵- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(f(x)))=\lim_{x\to 2^-} f(f(x))=\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت) (آسان)

۱۶- گزینه «۲» ـ برای محاسبه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ کافی است که جمله پرتوان زیر رادیکال‌ها را انتخاب کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{(2x)(x^2)(4x^2)}}{2x\sqrt[3]{x\times x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt[3]{x^5}}{2x\sqrt[3]{x^2}}=1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت) (آسان)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$x+4=0 \Rightarrow x=-4$

$g(x)=f(x+1)$ ، $g(-4)=0 \Rightarrow f(-3)=0$

$h(x)=f(2x-1)$ ، $h(-4)=f(-9)=0$

چون $f(-9)=f(-3)=0$ است پس $f(x)$ بر $(x+3)$ و $(x+9)$ بخش‌پذیر و در نتیجه بر $(x+3)(x+9)$ بخش‌پذیر است، پس باقی‌مانده صفر خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تقسیم) (متوسط)

۱۸- گزینه «۳» ـ

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{[-x][x]+5}{x^2-4}=\frac{-3\times 2+5}{4^+-4}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

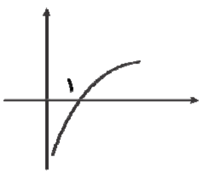
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد بی‌نهایت) (متوسط)

۱۹- گزینه «۳» ـ

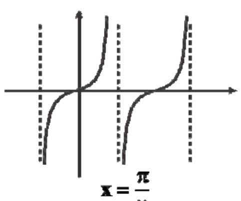
$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[x]+a}{\sin x}=\frac{3+a}{0^-}=+\infty \Rightarrow 3+a<0 \Rightarrow a<-3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد بی‌نهایت) (متوسط)

۲۰- گزینه «۴» ـ نمودار دو تابع $\tan x$ و $\log x$ را رسم می‌کنیم و حدهای خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.



$\lim\limits_{x\to 0^+}\log x=-\infty$



$x=\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$

و اما دو حد دیگر:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2}}{|x|}=\frac{1-\sqrt{2}}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9}}{-x^2}=\frac{\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9}}{0^-}=+\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد بی‌نهایت) (متوسط)