هندسه

۱- گزینه «۲» ـ ابتدا ماتریس AB را به‌دست می‌آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & m & ۲ \\ ۳ & m+۱ & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-۱ & m+۴ \\ m-n+۴ & m+n+۷ \end{bmatrix}$$

بنابر اطلاعات صورت سؤال:

$$m+۴ = ۴ \quad \text{و} \quad m+n+۷ = ۱۰$$

به‌دست می‌آید $m = ۰$ و $n = ۳$. در نهایت می‌نویسیم:

$$۲m + n = ۲\times ۰ + ۳ = ۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس‌ها)

۲- گزینه «۱» ـ می‌نویسیم:

$$A(A-۲I) = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۰ & m-۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -m+۲ \\ ۰ & m(m-۳) \end{bmatrix}$$

چون $A(A-۲I) = nI$، پس:

$$\begin{bmatrix} -۲ & -m+۲ \\ ۰ & m(m-۳) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & ۰ \\ ۰ & n \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$n = -۲ \,, m = ۲$$

به‌دست می‌آید:

$$m + n = ۰$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس ـ برابری ماتریس‌ها)

۳- گزینه «۳» ـ توان‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم تا بتوانیم حدس بزنیم $A^{۱۰}$ چگونه است؟

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲a \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = \begin{bmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲a \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳a \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اکنون به سادگی می‌توان حدس زد:

$$A^{n} = \begin{bmatrix} ۱ & na \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس:

$$A^{۱۰} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱۰a \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابر فرض مسئله $۱۰a = ۳۰$. یعنی $a = ۳$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توان‌های بالای ماتریس)

۴- گزینه «۴» ـ می‌نویسیم:

فرض مسئله: $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$

می‌دانیم: $(A+B)^۲ = A^۲ + AB + BA + B^۲$

با مقایسه برابری‌های بالا نتیجه می‌گیریم:

$$AB = BA$$

پس:

$$\begin{bmatrix} a & a \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -۱ \\ -۳ & ۲a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -۱ \\ -۳ & ۲a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix} ab-۳a & ۲a^۲-a \\ ۳b-۶ & ۴a-۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab-۳ & ab-۲ \\ ۳a & a \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} ۴a-۳=a \\ ۳b-۶=۳a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۳ \end{cases}$$

یعنی:

$$a+b=۴$$

(کتاب همراه علوی با تغییر) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس‌ها)

۵- گزینه «۳» ـ از برابری $A^۳ - ۲A + I = \overline{O}$ به‌دست می‌آید:

$$A^۳ - ۲A = -I \Rightarrow ۲A - A^۳ = I \Rightarrow A(۲I - A^۲) = I$$

در نتیجه:

$$A^{-۱} = ۲I - A^۲$$

یعنی $A^۲ + A^{-۱} = ۲I$. اکنون به‌دست آورید:

$$|A^۲ + A^{-۱}| = |۲I| = ۲^۳\,|I| = ۸\times۱ = ۸$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس و دترمینان)

۶- گزینه «۴» ـ می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} ۱۲ & ۲k & ۲m \\ ۱۲ & -۱ & n \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} \xlongequal[\text{۳ فاکتور می‌گیریم}]{\text{در ستون اول از}} ۳\begin{vmatrix} ۴ & ۲k & ۲m \\ ۴ & -۱ & n \\ ۱ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} \xlongequal[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{در سطر اول از ۲}} ۶\underbrace{\begin{vmatrix} ۲ & k & m \\ ۴ & -۱ & n \\ ۱ & ۵ & ۷ \end{vmatrix}}_{p} = ۶p$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ویژگی‌های دترمینان)

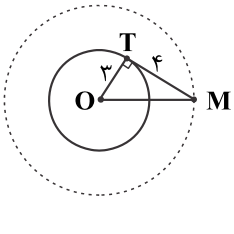
۷- گزینه «۴» ـ وقتی دو خط d و d' فقط یک نقطه مشترک داشته باشند یعنی دستگاهِ شامل معادله این دو خط فقط یک جواب دارند:

$$\begin{cases} kx+۳y=۴ \\ x-۲y=۳ \end{cases}$$

شرط جواب منحصر به فرد: $\frac{k}{۱} \neq \frac{۳}{-۲} \Rightarrow k \neq -\frac{۳}{۲}$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ دستگاه معادلات)

۸- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. فرض کنید M نقطه‌ای از مکان باشد و طول مماس MT برابر ۴ باشد. در مثلث OTM بنابر قضیه فیثاغورس:



$$OM = \sqrt{OT^۲ + TM^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

یعنی مکان هندسی M دایره‌ای است به مرکز O و شعاع ۵. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ مکان هندسی)

۹- گزینه «۳» ـ به ازای هر مقدار دلخواه m معادله قطرهای دایره یکی از قطرهای دایره به‌دست می‌آید. دو مقدار دلخواه به m می‌دهیم، معادله دو قطر به‌دست می‌آید. با قطع دادن آن دو قطر مختصات مرکز دایره به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l} m=۰ \Rightarrow \text{قطر دایره}: x+۷=۰ \\ m=-۱ \Rightarrow \text{قطر دایره}: x+y=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow O=(-۷\,,\,۷)$$

چون $A(۵\,,\,۲)$ روی دایره است، پس:

$$\text{شعاع دایره} = r = OA = \sqrt{(۵+۷)^۲+(۷-۲)^۲} = ۱۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادله دایره)

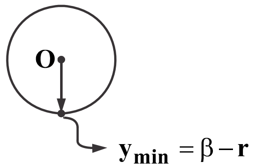
۱۰- گزینه «۴» ـ وسط AB مرکز دایره است:

$$O=\frac{A+B}{۲}=(\frac{-۱+۳}{۲}\,,\,\frac{-۱+۵}{۲})=(\underset{\alpha}{\underset{\downarrow}{۱}}\,,\,\underset{\beta}{\underset{\downarrow}{۲}})$$

فاصله O تا A برابر شعاع دایره است:

$$r=OA=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

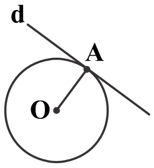
اکنون بنابر شکل به‌دست می‌آید:



$$\text{کمترین عرض نقطه‌های روی دایره} = \beta - r = ۲-\sqrt{۱۳}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ دایره)

۱۱- گزینه «۳» ـ از شکل فرضی مقابل استفاده می‌کنیم. با به‌دست آوردن مختصات O، شیب خط OA را به‌دست می‌آوریم:



$$O=(-\frac{-۲}{۲}\,,\,-\frac{-۲}{۲})=(۱\,,\,۱) \Rightarrow m_{OA}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$$

چون خط مماس بر دایره بر خط OA عمود است، پس شیب آن قرینه و معکوس شیب خط OA است:

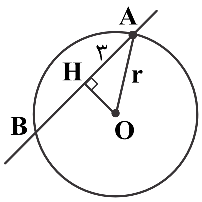
$$m_d=-\frac{۱}{m_{OA}}=-\frac{۱}{۲}$$

اکنون با داشتن شیب خط d و نقطه A معادله آن را به‌دست می‌آوریم:

$$y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲) \Rightarrow ۲y+x=۸$$

در بین گزینه‌ها فقط نقطه گزینه «۳» در این خط صدق می‌کند. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادله مماس بر دایره)

۱۲- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. فاصله O تا خط را به‌دست می‌آوریم:



$$OH=\frac{|۳(-۱)-۴\times۰+۱۳|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=۲$$

می‌دانیم شعاع عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس $AH=\frac{AB}{۲}=۳$. اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث OAH شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:

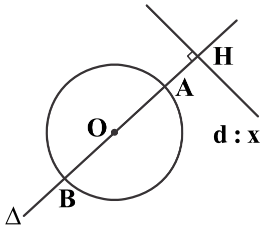
$$r=\sqrt{AH^۲+OH^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

در نهایت مساحت دایره را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$S=\pi r^۲=۱۳\pi$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ دایره)

۱۳- گزینه «۱» ـ روش اول: از نمادگذاری شکل فرضی زیر استفاده می‌کنیم. معادله خط OH را به‌دست می‌آوریم. (توجه کنید که چون OH بر d عمود است پس شیب آن برابر ۱ است):



$$x^۲ + y^۲ - ۲y = ۰ \Rightarrow O = (۰, ۱)$$
$$\Delta : y - ۱ = ۱(x - ۰) \Rightarrow y = x + ۱$$

اکنون خط OH را با معادله دایره قطع می‌دهیم:

$$x^۲ + (x+۱)^۲ - ۲(x+۱) = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

در نتیجه $x_A + x_B = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$.

روش دوم: O وسط AB قرار دارد. بنابراین:

$$O = \frac{A+B}{۲} \Rightarrow (۰, ۱) = (\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}) \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_A + x_B = ۰$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ خط و دایره)

۱۴- گزینه «۱» ـ ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} C : O(۰, ۱) & r = ۲ \\ C' : O'(۱, -۲) & r' = ۳ \end{cases}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$OO' = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰}$$

چون $|r - r'| < OO' < r + r'$ پس دو دایره متقاطع هستند. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ وضع دو دایره)