گسسته

۱- گزینه «۱» ـ با برهان خلف ثابت می‌کنیم $A=(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_{1399}+b_{1399})$ عددی زوج است و نتیجه می‌گیریم $A+1$ فرد است.
اثبات زوج بودن A. (برهان خلف): فرض کنید A زوج نباشد، پس فرد است. ضرب ۱۳۹۹ عدد، فرد شده است، پس هر ۱۳۹۹ عدد فرد هستند.
یعنی a_1+b_1، a_2+b_2، ... ، $a_{1399}+b_{1399}$ همگی فرد هستند. جمع ۱۳۹۹ عدد فرد عددی فرد هستند. یعنی

$$B=a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_{1399}+b_{1399}$$

فرد است. از طرف دیگر

$$B=\underbrace{(a_1+a_2+\ldots+a_{1399})}_{x}+\underbrace{(b_1+b_2+\ldots+b_{1399})}_{x}=2x$$

پس $B=2x$ زوج است و این با فرد بودن B در تناقض است. در نتیجه A فرد است و $A+1$ فرد است.
(هویدی) (فصل اول ـ درس اول ـ استدلال)

۲- گزینه «۲» ـ از $9\mid 4a+10$ نتیجه می‌گیریم $9\mid 4a+10-9$ یعنی $9\mid 4a+1$ دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$81\mid 16a^2+8a+1$$

سمت راست را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم

$$81\mid 32a^2+16a+2 \quad (1)$$

برای اینکه $\frac{32a^2+16a+k}{81}$ عددی صحیح باشد، باید

$$81\mid 32a^2+16a+k \quad (2)$$

از دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $k=2+81m$. در بین گزینه‌ها فقط گزینه «۲» در این رابطه صدق می‌کند.
توجه: می‌توان این نوع مسئله‌ها را با عددگذاری هم حل کرد.
(هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری)

۳- گزینه «۴» ـ ثابت می‌کنیم به‌ازای هر k و n طبیعی، $(n, n+k)\mid k$.
اثبات: فرض کنید $(n, n+k)=d$. می‌نویسیم

$$\begin{cases} d\mid n \\ d\mid n+k \end{cases} \Rightarrow d\mid (n+k)-n \Rightarrow d\mid k$$

یعنی: $(n, n+k)\mid k$
اکنون نتیجه می‌گیریم به‌ازای تمام عددهای طبیعی n رابطه برقرار است.
(هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ ب . م . م)

۴- گزینه «۲» ـ بنابرفرض $a=bq+17$، در نتیجه

$$2a=2bq+34=bq'+34 \quad (1)$$

از طرف دیگر: $2a=bq''+9 \quad (2)$

از برابری‌های (۱) و (۲) بدست می‌آید: $bq''+9=bq'+34$

در نتیجه: $b(q''-q')=25$

یعنی $b\mid 25$. چون $b>17$ پس تنها گزینه‌ای که در این شرایط صدق می‌کند ۲۵ است. (هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ الگوریتم تقسیم)

۵- گزینه «۱» ـ اگر a عددی فرد باشد $a^2=8k+1$ و اگر a زوج باشد $a^2=8k$ یا $a^2=8k+4$ اکنون $a^2=8b+42$ را در نظر می‌گیریم.

$$a_2=8b+40+2=8(\underbrace{b+5}_{k})+2=8k+2$$

و این اتفاق برای هیچ عدد صحیح a رخ نمی‌دهد. (هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ افراز مجموعه $\mathbb{Z}$)

۶- گزینه «۱» ـ از $2^2\overset{5}{\equiv}-1$ نتیجه می‌گیریم:

$$(2^2)^{25}\overset{5}{\equiv}(-1)^{25} \Rightarrow 2^{50}\overset{5}{\equiv}-1 \Rightarrow 2^{50}+a\overset{5}{\equiv}-1+a$$

چون می‌خواهیم $2^{50}+a$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، پس:

$$-1+a\overset{5}{\equiv}0 \Rightarrow a\overset{5}{\equiv}1$$

تنها عددی که در این رابطه صدق می‌کند عدد ۱ است. (هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ ویژگی‌های هم‌نهشتی)

۷- گزینه «۴» ـ چون $(6, 51)\nmid 23$ پس این معادله جواب ندارد. (هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادله هم‌نهشتی)

۸- گزینه «۴» ـ چون $(۱۴۳ , ۲۲) = ۱۱$ باید کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند m را پیدا کنیم که

$$۱۱ \mid ۱۷ + m$$

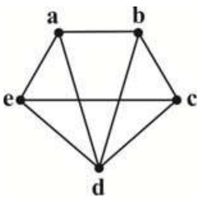
یعنی:

$$۱۷ + m \overset{۱۱}{\equiv} ۰$$
$$۶ + m \overset{۱۱}{\equiv} ۰$$
$$m \overset{۱۱}{\equiv} -۶$$
$$m \overset{۱۱}{\equiv} -۶ + ۱۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$$

پس کوچک‌ترین عدد طبیعی m برابر ۵ است. (هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادله سیاله)

۹- گزینه «۱» ـ کافی است یال cf و یا یال ed را رسم کنیم. چون هر کدام از این یال‌ها به تنهایی شرایط مسئله را ایجاد می‌کند پس تنها یک یـال کافی است. (هویدی) (فصل دوم ـ درس اول ـ راس فرد راس زوج)

۱۰- گزینه «۴» ـ با توجه به تعریف گراف G به‌صورت روبه‌رو است به سادگی دیده می‌شود.



$$N_G[d] = \{a , b , c , d , e\}$$

یعنی:

$$| N_G[d] | = ۵$$

(هویدی) (فصل دوم ـ درس اول ـ همسایگی بسته راس)

۱۱- گزینه «۳» ـ برای داشتن زیر گرافی از مرتبه ۶ واندازه ۴ باید هر ۶ راس و ۴ تا از یالهای گراف اولیه را انتخاب کنیم. بنـابراین تعـداد ایـن زیـر گراف‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\binom{۸}{۴} = ۷۰$$

(هویدی) (فصل دوم ـ درس اول ـ زیر گراف)

۱۲- گزینه «۲» ـ اندازه گراف P_n برابر $n-۱$ و اندازه گراف $k_۶$ برابر $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ است.

بنابراین:

$$n - ۱ = ۱۵ - ۱۲ \Rightarrow n = ۴$$

(هویدی) (فصل دوم ـ درس اول ـ مسیر و دور در گراف ـ گراف کامل)