ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۲» ـ توجه کنید که گزاره «$4n-1$ عددی فرد است» گزاره‌ای همواره درست است. در بین گزاره‌های داده شده فقط گزاره «$8n+6$ عددی زوج است» همواره درست است.

یادآوری: دو گزاره p و q هم‌ارز هستند هرگاه هم‌ارزش باشند. یعنی اگر p درست باشد q هم درست باشد و برعکس و همچنین، اگر p نادرست باشد q هم نادرست باشد و برعکس. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس اول ـ گزاره‌های هم‌ارز)

۲- گزینه «۳» ـ بنابر فرض مسأله $n-1 | 2n+3$. از طرف دیگر $n-1 | n-1$ اکنون به‌دست می‌آید:

$$n-1 | (2n+3)-2(n-1) \Rightarrow n-1 | 5$$

یعنی $n-1$ یکی از مقسوم‌علیه‌های ۵ است. بنابراین:

$n-1=5$ یا $n-1=-5$ یا $n-1=1$ یا $n-1=-1$

به‌دست می‌آید:

$n=6$ یا $n=-4$ یا $n=2$ یا $n=0$

پس برای n چهار مقدارِ صحیح به‌دست می‌آید. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری و ویژگی‌های آن)

۳- گزینه «۲» ـ چون a عددی فرد است، پس $a^2 = 8t+1$. بنابراین:

$$A=(a^2+3)(a^2+7)=(8t+1+3)(8t+1+7)=(8t+4)(8t+8)=32\underbrace{(2t+1)(t+1)}_{q}=32q$$

یعنی $32 | A$. در نتیجه هر مقسوم‌علیه ۳۲ عبارت $A=(a^2+3)(a^2+7)$ را می‌شمارد. در بین گزینه‌ها عدد ۱۲ مقسوم‌علیه ۳۲ نیست. پس این گزینه درست است.

نگاه دیگر: می‌توانستیم به جای a عدد ۱ را قرار دهیم. به‌دست می‌آید $(1^2+3)(1^2+7)=32$ و این عدد بر تمام عددهای گزینه‌ها غیر از عدد ۱۲ بخش‌پذیر است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ الگوریتم تقسیم ـ افراز مجموعه $\mathbb{Z}$)

۴- گزینه «۳» ـ بنابر الگوریتم تقسیم، با فرض این‌که q برابر خارج قسمت و r باقی‌مانده این تقسیم باشد می‌نویسیم:

$$a=13q+r$$
$$0 \le r < 13$$

از صورت مسئله به‌دست می‌آید $r=\frac{1}{3}q$. در نتیجه:

$$r=\frac{1}{3}q<13 \Rightarrow q<39$$

دقت کنید که q باید مضرب ۳ باشد، در نتیجه بیشترین مقدار q برابر ۳۶ است و در نهایت بیشترین مقدار a به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{بیشترین مقدار } a = 13\times 36+\frac{1}{3}\times 36 = 480$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ الگوریتم)

۵- گزینه «۱» ـ روش اول: می‌دانیم اگر $p>3$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+2$ نوشته می‌شود. به‌طور مشابه برای $q>3$ هم $q=6k'+1$ یا $q=6k'+2$ نوشته می‌شود. در هیچ حالتی $p-q$ نمی‌تواند به فرم $6k''+1$ باشد. پس هیچ‌وقت جفت عدد اول با شرایط مسئله پیدا نمی‌شود.

روش دوم: p و q عددهایی فرد هستند پس $p-q$ عددی زوج است. از طرف دیگر عددی که باقی‌مانده آن بر ۶ برابر ۱ باشد به‌صورت $6k+1$ است و عددی فرد است. پس هیچ‌گاه $p-q$ نمی‌تواند به فرم $6k+1$ باشد. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ اعداد اول)

۶- گزینه «۴» ـ چون $(a^{۳}-۱\,,\,b^{۲}-۱)=۱$ پس هر مقسوم‌علیه $a^{۳}-۱$ و هر مقسوم‌علیه $b^{۲}-۱$ نسبت به هم اول هستند. می‌دانیم:

$$(a^{۳}-۱)=(a-۱)(a^{۲}+a+۱)$$

$$b^{۲}-۱=(b-۱)(b+۱)$$

بنابراین گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» درست هستند. برای گزینه «۴» می‌توان $a=۲$ و $b=۴$ را به‌عنوان مثال نقض در نظر گرفت.

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ب.م.م)

۷- گزینه «۱» ـ چون دو عدد $۳a-۵$ و $۴a-۷$ دارای رقم یکانِ برابر هستند، پس:

$$۳a-۵\overset{۱۰}{\equiv}۴a-۷\ \Rightarrow\ a\overset{۱۰}{\equiv}۲$$

$$۹a+۶\overset{۱۰}{\equiv}۹\times۲+۶\overset{۱۰}{\equiv}۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۴$$

(کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ قوانین هم‌نهشتی)

۸- گزینه «۲» به سادگی به‌دست می‌آید:

$$۸۶\overset{۱۷}{\equiv}۱۷\times۵+۱\overset{۱۷}{\equiv}۱$$

در نتیجه

$$۸۶^{۱۳۹۹}\overset{۱۷}{\equiv}۱\ \Rightarrow\ ۸۶^{۱۳۹۹}+a\overset{۱۷}{\equiv}۱+a$$

در نتیجه

$$۱+a\overset{۱۷}{\equiv}۰\ \Rightarrow\ a\overset{۱۷}{\equiv}-۱$$

یعنی:

$$a=۱۷k-۱$$

تنها گزینه‌ای که به این فرم است، گزینه «۲» است و به ازای $k=۲$ به‌دست می‌آید. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ قوانین بخش‌پذیری)

۹- گزینه «۴» ـ فرض می‌کنیم $d=(۲a+۳\,,\,a^{۲}-۱)$. شرط این‌که معادله بالا جواب داشته باشد این است که $d\,|\,۴۰$. بنابر تعریف ب.م.م می‌نویسیم:

$$\begin{cases}d\,|\,۲a+۳\\ d\,|\,a^{۲}-۱\end{cases}\ \Rightarrow\ d\,|\,(۲a+۳)(۲a-۳)-۴(a^{۲}-۱)\ \Rightarrow\ d\,|\,-۵$$

در نتیجه $d\,|\,(-۸)\times(-۵)$ یعنی $d\,|\,۴۰$. پس این معادله همواره جواب دارد. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادله سیاله)

۱۰- گزینه «۳» ـ می‌دانیم $۹\overset{۲۵}{\equiv}۳۴$ پس $۳۴x\overset{۲۵}{\equiv}۹x$. اکنون معادله داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$۹x\overset{۲۵}{\equiv}۱۵-۲\ \Rightarrow\ ۹x\overset{۲۵}{\equiv}۱۳$$

به سمت راست ۲×۲۵ را اضافه می‌کنیم:

$$۹x\overset{۲۵}{\equiv}۱۳+۲\times۲۵\overset{۲۵}{\equiv}۶۳$$

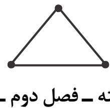
اکنون با در نظر گرفتن $(۲۵\,,\,۹)=۱$ دو طرف را به ۹ ساده می‌کنیم:

$$x\overset{۲۵}{\equiv}۷\ \Rightarrow\ x=۲۵k+۷$$

کوچک‌ترین عدد سه رقمی به ازای $k=۴$ به‌دست می‌آید و برابر $x=۱۰۷$ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات هم‌نهشتی)

۱۱- گزینه «۲» ـ به دنبال رأسی می‌گردیم که فقط با a، c و d مجاور باشد. در بین رئوس این گراف، فقط f این ویژگی را دارد.

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل دوم ـ درس اول ـ همسایگی رأس‌ها)

۱۲- گزینه «۴» ـ گراف کامل $k_{۱۰}$ دارای $\binom{۱۰}{۲}=۴۵$ یال است. یعنی برای به‌دست آمدنِ گرافِ موردنظر باید ۳ یال از گراف کاملِ $k_{۱۰}$ حذف کنیم. در گراف کامل $k_{۱۰}$ درجه هر رأس برابر ۹ است. برای ایجاد رأس با درجه ۷ باید یال‌ها را به‌صورت  حذف کنیم تا ۳ رأس درجه ۷ ایجاد شود. در غیر این‌صورت نمی‌توان بیش از ۳ رأس از درجه ۷ ایجاد کرد. (کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل دوم ـ درس اول ـ گراف کامل ـ درجه رئوس)

۱۳- گزینه «۲» ــ در این نوع مسائل که ماکزیمم یال را می‌خواهد، دو رأس را کنار می‌گذاریم و با ۱۰ رأس باقی‌مانده گراف کامل k_{10} را ایجاد مــی‌کنــیم. پس حداکثر تعداد یال در گراف با شرایط مسأله برابر $45 = \binom{10}{2}$ است.

(کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ــ فصل دوم ــ درس اول ــ گراف هم‌بند ــ گراف کامل ــ تعداد یال)

۱۴- گزینه «۴» ــ بنابر فرض مسئله $q = 3p$. از طرف دیگر می‌دانیم:

$$q \leq \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

پس:

$$3p \leq \frac{p(p-1)}{2}$$

بنابراین:

$$3 \leq \frac{p-1}{2}$$

یعنی $p \geq 7$. در نتیجه حداقل تعداد رأس‌های گراف برابر $p = 7$ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ــ فصل دوم ــ درس اول ــ مرتبه و اندازه)

۱۵- گزینه «۲» ــ فرض کنید p_n را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$v_1 - v_2 - v_3 \cdots\cdots v_{n-1} - v_n$$

برای پیدا کردن مسیری به طول k، می‌توانیم یکی از رأس‌های v_1 ، v_2 ، v_3 ، ... ، V_{n-k} شروع و مسیری به طول k را طی کنیم. ایــن مســیرها عبارتند از:

$$\begin{array}{llll}
v_1 , & v_2 , & \cdots , & v_{k+1} \\
v_2 , & v_3 , & \cdots , & v_{k+2} \\
v_3 , & v_4 , & \cdots , & v_{k+3} \\
v_4 , & v_5 , & \cdots , & v_{k+4} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
v_{n-k} & & , & v_n
\end{array}$$

بنابراین تعداد مسیرهای موردنظر برابر با $n-k$ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ــ فصل دوم ــ درس اول ــ مسیر در گراف)