ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۳» ـ می‌دانیم اگر $a^{۲}$ زوج باشد، آن‌گاه a زوج است، در نتیجه از زوج بودن $\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{n(n+۱)}{۲}$ زوج است و این زمانی رخ می‌دهد که $n(n+۱)$ مضرب ۴ باشد، به عبارتی n مضرب ۴ است یا $n+۱$ مضرب ۴ است، به ازای $n=۵$ این اتفاق رخ نمی‌دهد.

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ استدلال ـ اشباع) (آسان)

۲- گزینه «۲» ـ چون در گزینه‌ها $۴a^{۲}+b^{۲}$ وجود دارد، پس باید ترکیب خطی را به گونه‌ای بسازیم که در آن عبارت $۴a^{۲}+b^{۲}$ به وجود بیاید.

می‌دانیم $۹\,|\,۹a^{۲}$، می‌توان نوشت:

$$۹\,|\,۵a+۲b \xrightarrow{\text{سمت راست}\times a} \begin{cases} ۹\,|\,۵a^{۲}+۲ab \\ ۹\,|\,۹a^{۲} \end{cases} \Rightarrow ۹\,|\,۹a^{۲}-(۵a^{۲}+۲ab) \Rightarrow ۹\,|\,۴a^{۲}-۲ab \quad (۱)$$

همچنین می‌دانیم $۹\,|\,۹b^{۲}$، می‌نویسیم:

$$۹\,|\,۵a+۲b \xrightarrow{\text{سمت راست}\times ۴b} \begin{cases} ۹\,|\,۲۰ab+۸b^{۲} \\ ۹\,|\,۹b^{۲} \end{cases} \Rightarrow ۹\,|\,۹b^{۲}-(۲۰ab+۸b^{۲}) \Rightarrow ۹\,|-۲۰ab+b^{۲} \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$۹\,|\,(۴a^{۲}-۲ab)+(-۲۰ab+b^{۲}) \Rightarrow ۹\,|\,۴a^{۲}-۲۲ab+b^{۲}$$

می‌دانیم $۹\,|\,۲۷ab$، در نتیجه:

$$۹\,|\,(۴a^{۲}-۲۲ab+b^{۲})+۲۷ab \Rightarrow ۹\,|\,۴a^{۲}+۵ab+b^{۲}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ بخش‌پذیری) (متوسط)

۳- گزینه «۳» ـ بنابر فرض مسئله:

$$\begin{cases} a=۸q_{۱}+۷ \\ a=۱۱q_{۲}+۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۱a=۸۸q_{۱}+۷۷ \quad (۱) \\ ۸a=۸۸q_{۲}+۷۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۳a=۸۸\underbrace{(q_{۱}-q_{۲})}_{q_{۳}}+۵$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$۳a=۸۸q_{۳}+۵ \xrightarrow{\text{طرفین}\times ۴} ۱۲a=۸۸(۴q_{۳})+۲۰$$

$$(۱):\underline{۱۱a=۸۸q_{۱}+۷۷}$$

$$a=۸۸(۴q_{۳}-q_{۱})-۵۷+۸۸-۸۸ \Rightarrow a=۸۸(۴q_{۳}-q_{۱}-۱)+۳۱$$

یعنی باقی‌مانده تقسیم a بر ۸۸ برابر ۳۱ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ بخش‌پذیری) (دشوار)

۴- گزینه «۲» ـ دو عدد را a و b در نظر می‌گیریم. بنابر فرض مسئله:

$$d=(a\,,b)=۳۱\,,\ a+b=۳۷۲$$

از $d=۳۱$ نتیجه می‌گیریم:

$$a=a'\times ۳۱\,,\ b=b'\times ۳۱\,,\ (a'\,,b')=۱$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$a+b=۳۷۲ \Rightarrow a'\times ۳۱+b'\times ۳۱=۳۷۲ \Rightarrow a'+b'=۱۲$$

چون $(a'\,,b')=۱$، پس $\{a'\,,b'\}=\{۱\,,۱۱\}$ یا $\{۷\,,۵\}$؛ یعنی دو جفت عدد طبیعی با شرایط داده شده وجود دارد. این دو جفت عبارتند از $\{۳۱\,,۳۴\}$ و $\{۲۱۷\,,۱۵۵\}$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ب.م.م و متباین‌سازی) (دشوار)

۵- گزینه «۳» ـ بنابر فرض $a\overset{۴۲}{\equiv}۰$، $b\overset{۶۳}{\equiv}۰$ و $c\overset{۹۱}{\equiv}۰$. چون $۴۲\,|\,۷$، $۶۳\,|\,۷$ و $۹۱\,|\,۷$، پس $a\overset{۷}{\equiv}۰$، $b\overset{۷}{\equiv}۰$ و $c\overset{۷}{\equiv}۰$، در نتیجه:

$$a+b+c\overset{۷}{\equiv}۰$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ هم‌نهشتی) (متوسط)

۶- گزینه «۳» ـ فرض کنید $A = \overline{۳۸a۲۵b۴}$ بر ۴۴ بخش‌پذیر باشد، در این صورت A بر ۴ و ۱۱ بخش‌پذیر است.

$$A \overset{۴}{\equiv} \overline{b۴} \overset{۴}{\equiv} ۲b + ۴ \overset{۴}{\equiv} ۲b$$

چون $A \overset{۴}{\equiv} ۰$، پس $۲b \overset{۴}{\equiv} ۰$ یا $b \overset{۲}{\equiv} ۰$، بنابراین b برابر صفر، ۲، ۴، ۶ یا ۸ است. همچنین:

$$A \overset{۱۱}{\equiv} ۴ - b + ۵ - ۲ + a - ۸ + ۳ \overset{۱۱}{\equiv} a - b + ۲$$

چون $A \overset{۱۱}{\equiv} ۰$، پس $a - b + ۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰$. با توجه به مقادیر مشخص شده برای b می‌توان نوشت:

$$b = ۰ \xrightarrow{a+۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰} a = ۹ \qquad b = ۲ \xrightarrow{a \overset{۱۱}{\equiv} ۰} a = ۰ \qquad b = ۴ \xrightarrow{a-۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰} a = ۲$$

$$b = ۶ \xrightarrow{a-۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۰} a = ۴ \qquad b = ۸ \xrightarrow{a-۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۰} a = ۶$$

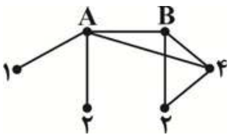
پس (a , b) برابر $(۰ , ۹)$، $(۲ , ۰)$، $(۴ , ۲)$، $(۶ , ۴)$ یا $(۸ , ۶)$ است و ۵ عدد ۷ رقمی به‌صورت $\overline{۳۸a۲۵b۴}$ وجود دارد که بر ۴۴ بخش‌پذیر است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ قوانین محاسبه باقی‌مانده) (متوسط)

۷- گزینه «۱» ـ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} ۵x \overset{۱۳}{\equiv} ۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۳ - ۱۳ \overset{۱۳}{\equiv} -۱۰ \Rightarrow ۵x \overset{۱۳}{\equiv} -۱۰ \\ (۵ , ۱۳) = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow x \overset{۱۳}{\equiv} -۲$$

یعنی x به‌صورت $۱۳k - ۲$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ معادله هم‌نهشتی) (آسان)

۸- گزینه «۲» ـ چون حداکثر مجموع درجه دو رأس باقی‌مانده را می‌خواهد، بنابراین خود این دو رأس را مجاور می‌کنیم و تا حد امکان رأس‌های دیگر را به آن وصل می‌کنیم. در شکل زیر A و B دو رأس موردنظر هستند.



در نتیجه مجموع درجات این دو رأس برابر ۷ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ درجه رئوس گراف ـ رسم گراف) (دشوار)

۹- گزینه «۲» ـ در گراف با ۶ رأس، اگر تمام یال‌ها را رسم کنیم، تعداد آن‌ها برابر $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ است. اگر یال ab را کنار بگذاریم، در هر گراف با شرایط مسئله برای ۱۴ یال باقی‌مانده دو حالت رخ می‌دهد، پس تعداد کل گراف‌های با این ویژگی برابر $۲^{۱۴}$ است.

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ مفهوم گراف ـ شمارش گراف) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» ـ گراف P_n از مرتبه n و اندازه $n - ۱$ است و حاصل‌ضرب مرتبه و اندازه این گراف برابر $n(n - ۱)$ است؛ یعنی برابر ضرب دو عدد متوالی است. در بین گزینه‌ها فقط ۱۳۲ را می‌توان به‌صورت ضرب دو عدد متوالی نوشت:

$$۱۳۲ = ۱۲ \times ۱۱$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ مرتبه و اندازه ـ گراف P_n) (آسان)

۱۱- گزینه «۲» ـ درجه مجهول را x فرض می‌کنیم:

تعداد رئوس	۴	۲	۱۴
درجه	۱	۲	x

می‌دانیم $\sum_{i=۱}^{P} \deg V_i = ۲q$، بنابراین:

$$۴ \times ۱ + ۲ \times ۲ + ۱۴ \times x = ۲ \times ۳۲ \Rightarrow x = ۴$$

پس تعداد رئوس زوج برابر $۱۶ = ۱۴ + ۲$ است. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ مجموعه درجه رئوس) (آسان)

۱۲- گزینه «۳» ـ در یک گراف ۳ ـ منتظم می‌دانیم $۳p = ۲q$، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$۳q = ۴(p + ۱) \xrightarrow{q = \frac{۳}{۲}p} ۳(\frac{۳}{۲}p) = ۴p + ۴ \Rightarrow ۹p = ۸p + ۸ \Rightarrow p = ۸ , q = ۱۲$$

در نتیجه $p + q = ۲۰$. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ گراف منتظم) (آسان)

۱۳- گزینه «۳» ـ در گراف کامل با P رأس، اندازه برابر $\binom{P}{۲}$ است. بنابر فرض مسئله $P \times \binom{P}{۲} = ۵۰$؛ یعنی $P = ۵$. تعداد دورهای به طول ۴ در گراف کامل $k_۵$ برابر $\binom{۵}{۴} \times \frac{۳!}{۲} = ۱۵$ است. (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۲) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ دور در گراف کامل) (دشوار)